Déterminants
(version chantier)

Marc SAGE

<2015

Table des matières

Titre : **algébriciation du volume : l'outil déterminantal**

det est un volume –> intuition dim 2 et 3
En dim n, on veut immtier le volume –> quel axiome **algébrique** ? nul si lié, alterné, linéaire. (EXO FGN mq sol unique ? ? ? ?)
En vecteur, on a un corps sous-jacents, dans le réseau, on a un anneau sous-jacent.

faire parler la règle de (Pierre-Frédéric Sarrus, né le 10 mars 1798 à Saint-Affrique, décédé le 20 novembre 1861, est un mathématicien français.)pour libérer les peurs : det = somme de serpents signés !
exemple 2x2, 3x3
matrice triangulaire
matrice de permutation.

DEt $\begin{array}{ccc} & & 1 \\ & \diagup & \\ 1 & & \end{array}$: soit Sarrus, soit récurrence dvep ligne colonne –> $(-1)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$ (interpréter en terme de signature pour les petits cas)

$|\mathrm{Com}\, A| = |A|^{n+1}$, puis résoudre $\mathrm{Com}\, X = A$ où A donné inversible.

Attentention : pour qu'une forme n-linéaire envoie 0 sur 0, il faut $n \neq 0$! Bien vérifier que le det vide vaut 1 (il doit valoir 1 sur la base qui est le seul élément de E^0)

1 Intro

deux vecteurs —> aires...
le déterminant d'une famille de vecteurs est le volume (signé) engendré par le parallélépipède sous-tendu par ces vecteurs.
Le déterminant d'une application linéaire est le facteur de multiplciation des volumes
prendreun exmepe de $L\left(R^2\right)$

2 Formes linéaires alternées

eg de forme bilinéaire : le produit, ps dans R^3 (les deux sont symétriques), le produit vectoriel (alterné), chevron de dualité, $\begin{array}{cc} L(E) \times E & \\ u, a & u(a) \end{array}$, $\begin{array}{cc} L(E,F) \times L(F,G) & L(E,G) \\ u, v & v \circ u \end{array}$.
Le produit est multilinéaire : eg très important. On doit ainsi développer une application multilinéaire comme un produit

$$f\left(\sum_{I_1} \lambda_i e_i, \sum_{I_2} \lambda_i e_i, ..., \sum_{I_n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{I_1 \times I_2 \times ... \times I_n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} ... \lambda_{i_n} \cdot f\left(e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_n}\right)$$

Une application alternée annule une famille liée (réciproque vraie : liée ssi annule toute appl n lin alt –> EXO)

notons $\Lambda^n(E)$ les formes n-lin alt sur E. Cest une droite. À $u \in L(E)$ donné, l'appliation $\Lambda^n(E) \longrightarrow \Lambda^n(E)$ qui $\varphi \mapsto \varphi(u(\cdot), ..., u(\cdot))$ est une homothétie de rapport $\det u$.

Description de Λ_p^* : si $\overrightarrow{\varphi} \in E^{*p}$, on défini une forme p-lin alternée par $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_p : \overrightarrow{a} \mapsto \det \varphi_i(a_j)$. Alors

$$\Lambda_p^* = \bigoplus_{i_1 < \cdots < i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$$

ets de dim $\binom{\dim E}{p}$. On retrouve les cas $p = 0, 1, n$.

3 Propriétés du det

Det est multilinéaire : analague avec le développement d'un produit $(a_1+b_1)(a_2+b_2)\dots(a_n+b_n)$. Appliquer pour montrer que $\det(A+\lambda J)$ est affine en λ.

changment de bases : $\det_{B'} = \det_B B' \det_B$

$\det u$ indépendant de la base choisie.

$\det \mathrm{Id} = 1$, $\det uv = \det u \det v$, f inversible ssi $\det f \neq 0$

4 Déterminants de matrices

tout ramener aux colonnes : $\det A = \det(A\cdot) = \det_{b.c.}(C_1,\dots,C_n)$, et retrouver les prop des endo.

donner la notation $|A|$

$A \sim B \implies |A| = |B|$

$|{}^tA| = |A|$ – on peut tout ramener aux lignes

Faire parler Sarrus : eg triangulaire, cas où une colonne est formée de un λ et que des 0 ailleurs (démo par SArrus), d'où $\begin{vmatrix} I & * \\ & A \end{vmatrix} = |A|$ puis mat par blocs avec $\begin{vmatrix} A & * \\ & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & 0 \\ & B \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & * \\ & I \end{vmatrix}$, d'où idem par récurrence.

(autre démo : $A \overset{\alpha}{\mapsto} \begin{vmatrix} A & * \\ & 1 \end{vmatrix}$ est multilinénire alterné, donc $= \alpha(1)|A| = \begin{vmatrix} 1 & * \\ & 1 \end{vmatrix}|A| = |A|$; puis idem pour$B \overset{\beta}{\mapsto} \begin{vmatrix} A & * \\ & B \end{vmatrix}$ qui s'écrit $= \beta(1)|B| = \alpha(A)|B| = |A||B|$)

mineur = petit déterminant

cofacteur : voir une matrice carrée comme un tore : lorsqu'on barre un couple ligne/colone, le signe tient *uniquement* compte du réordonnemnt de la matrice mineurs.

5 Calcul de déterminants

trsasnvection, dilatation, permutations, homothéties

EXO : *Montrer que le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\{-1,1\}$ est un multiple de 2^{n-1}.*

DEM Il suffit d'ajouter la ligne 1 à chacune des lignes 2, 3,..., n et ensuite de mettre 2 en facteur dans les lignes 2, 3,..., n

développement lin/col : la formule est multilin en les colonns de la matrices alteré, et vaut 1 sur en Id.

COR : $A^t \operatorname{Com} A = |A|$

EXO : *A et B dans $M_n(\mathbb{Z})$ tq $|A| \wedge |B| = 1$. Mq $\exists U, V \in M_n(\mathbb{Z})$ tq $AU + BV = 1$.* Dem : on plonge bézout $u|A| + v|B| = 1$ dans $M_n(\mathbb{Z})$, d'où $A^t \operatorname{Com} A + vB^t \operatorname{Com} B = 1$.

vandermonde (polynôme)

formule Cramer

Miller (idée tueuse de Bruno)

matrice compagnon (développer dernière colonne directement !)

det tridiagonaux : récurrence linéaire (ici d'ordre 2) : compagnon ?

EXO : $\begin{matrix} A & -B \\ B & A \end{matrix} \geq 0$ si $A, B \in M(R)$: (ca sent le modul d'un complexe à plein nez)

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A - iB & -B \\ B + iA & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A - iB & -B \\ 0 & A + iB \end{vmatrix} = |A + iB|^2 \geq 0$$

EXO : si $AB = BA$, mq $\det\left(A^2 + B^2\right) \geq 0$. : écrire $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$. CEG si commutent pas : $\begin{matrix} 2 & \\ & \end{matrix}$ et $\begin{matrix} & -1 \\ 1 & \end{matrix}$: $A^2 + B^2 = \begin{matrix} 4 & \\ & -1 \end{matrix}$

EXO :$\det(M \mapsto AMB)$ à A, B fixés ? (on trouve $\det(AB)^n$)

EXO : det $\left(\left(\sum_{j\neq i} C_j\right)_i\right)$? par multilin, on multiplie par [que des 1 et 0 sur diag], d'où $(-1)^{n-1}(n-1)$.

rg invriant par extension de corps car $\max_{\det E\neq 0}$taille$E$

Determinant par blocs (cf plus haut)

POurquoi SL_n intérssant ? (cf JD page 96). À l'orgine, Lagrange cherchait les solutions entières de $ax^2+bxy+cy^2=n$. Il paramétrait les soluions $(x,y)=(\alpha X+\beta Y,\gamma X+\delta Y)$, mais laissait échapper certains solutions entireès (à cause du det). On retrouve tous le monde si le det est inversible dans $\mathcal{Z}$, ie vaut ± 1.

Cauchy-Binet : c'est la fonctorialité de Λ

det morphisme : le faire à la main est très bon exo : expliciter, développer, regrouper :

$$\det AB=\sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1,\ldots,n}\sum_{x=1,\ldots,n}A_{i,x}B_{x,\sigma(i)}=\sum_\sigma\varepsilon(\sigma)\sum_{\overrightarrow{x}}\prod_i A_{i,x_i}B_{x_i,\sigma(i)}=\sum_{\overrightarrow{x}}\prod_i A_{i,x_i}\sum_\sigma\varepsilon(\sigma)\prod_i B_{x_i,\sigma(i)}.$$

Si $\overrightarrow{x}$ n'est pas injectif, mettons $x_i=x_j$, alors composer σ par (i,j) donne le même produit, donc la même somme, à un sgne $\varepsilon(i,j)=-1$ près, donc dégage. Il ne reste que les x inj, ie les permtuation ξ. Par ailelurs, on développe

$$\det A\det B=\sum_{\xi,\rho}\left[\varepsilon(\xi)\prod_i A_{i,\xi(i)}\right]\left[\varepsilon(\rho)\prod_i B_{i,\rho(i)}\right]=\sum_{\xi,\rho}\varepsilon(\rho\xi)\prod_i A_{i,\xi(i)}\prod_i B_{i,\rho(i)}\overset{\rho=\sigma\xi^{-1}}{=}\sum_{\xi,\sigma}\varepsilon(\sigma)\prod_i A_{i,\xi(i)}\prod_i B_{i,\sigma\xi^{-1}(i)}.$$

Réindexer le dernier produit selon ξ donne $\sum_{\xi,\sigma}\varepsilon(\sigma)\prod_i A_{i,\xi(i)}\prod_i B_{\xi(i),\sigma(i)}$, d'où le résultat.

déterminant de Smith, du nom de Henry John Stephen Smith (1826-1883).

Voir : H. J. S. Smith, On the value of a certain arithmetical determinant, Proc. London Math. Soc. 7 (1875-1876), pp. 208-212.

Biographie : http ://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Smith.html