Matrices
(version chantier)

Marc SAGE

$<$2015

Table des matières

idée : un endo se code par n^2 scalaires –> Une matrice est un tableau de nombres.

On va mettre une structure d'algbères sur ces tableau qui sera isomorphe à $L(E)$. Bien donc garder en tête que les propriétés trouvées ne sortent pas de nulle part.

Soit $(A_{p,q})_{p,q\geq 1}$ une famille de sous-anneaux (d'un même anneau) telle que

$$\forall p,q,r,\ A_{p,q}A_{q,r} \subset A_{q,r}.$$

On note

$$M\left((A_{p,q})_{p,q\geq 1}\right) := \bigoplus_{p,q\geq 1} A_{p,q}$$

le sous-espace vectoriel de $\prod_{p,q\geq 1} A_{p,q}$ muni du produit matriciel

$$[MN]_{p,q} := \sum_{x\geq 1} [M]_{p,x}\,[N]_{x,q}\,.$$

On obtient ainsi une $\bigcap\limits_{p,q\geq 1} A_{p,q}$-algèbre.

Lorsque tous les $A_{p,q}$ sont égaux à un même anneau A, on note

$$M(A) := M\left((A)_{p,q\geq 1}\right) = \bigoplus_{p,q\geq 1} A = A^{(\mathbb{N}^{*2})}.$$

On pose alors

$$M_{a,b}(K) := \{M \in M(K)\ ;\ \operatorname{Supp} M \subset [1,a]\times[1,b]\}\,.$$

Le produit envoit alors $M_{a,b}\times M_{c,d} \longrightarrow M_{a,d}$. Remarquer que $M = \lim_n M_n$

noter J_n la matrice $(1,..,1,0...)$: idempotente, en partilcuer, J_n est le neutre de M_n

rq : on a $\begin{matrix} \forall M \in M(A)\,,\ M = \sum [M]_{i,j}\,E_{i,j} \\ \forall P \in A[X]\,,\ P = \sum [P]_i\,X^i \end{matrix}$: pas possible d'écire les matrices de bases comme puissances d'une ou deux (ou plus) matrices de bases (qui commutent), sinon on aurait un iso $M(A) \simeq A[X]$, or l'un est intègre et commutatif, et pas l'autre.

EG de pas commt : les matrice de Pauli $\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}$ vérifient $P_kP_{k+1} = -P_{k+1}P_k = iP_{i-1}$

Pourquoi pas inègre ? car il ya des nilpotent, eg $\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$. Pire : $\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} = 0$.

Comme pour les polynômes, pas la peine d'écrire les coefficients nuls (ou alors avec des tout petits $_0$)

pour faire du calcul avec des $\sum$, il faut connaitre le produit sur les génératuers (chasles, tout ca). D'ailleurs, on retrouver la formule du produit

Pour retenir $AE_{i,j} = A(...e_i...) = (0...C_i...)$, on utilise jsute $Ae_i = C_i$

donner une défition de la transposée sur génératuer (on switch $i \longleftrightarrow j$ dans $E_{i,j}$)

inverse de A est dans le vect d'un truc si $A\cdot$ est injetive ; il suffit que le truc soit une sous-algèbre : symétriques, triangulaire,

lien : M_n = projecteur modulo GL et pseudo inverse ?

Explicaiton endomorphisme de $Q^{-1}P$?

attention : $\operatorname{rg}({}^tAA) = \operatorname{rg} A$: pas vrai sur un corps quelconque : $\begin{matrix} 1 & 0 \\ i & 0 \end{matrix}$

on doit connaitre l'inverse d'une matrice 2×2. Paralle avec les homographies, mais ne pas oublier le déterminant !

l'inverse, la tranposition commutenat, ains qu'avec tout automorphisme de K. Aisi, ${}^t\overline{A}^{-1}$ n'a aucun ambuguité.

(**pseudo-inverse de Moore Penrose**)
DM Miquel. MAis aussi unicité sous la concition AA' et $A'A$ projectuer. Conscrution possible comme minimum de $\|AA'-1\|$ pour une norme strictement convexe (pas de plat sur les sphères) –> exo FGN ? ? ? ?

pivot de gauss & th base incomplète
Henri Lombardi, *Épistémologie mathématique* (p. 59-60)

1 calcul par blocs

La bonne façon de le dire est d'énoncer un isomorphisme.

Proposition.
Soit A un anneau, $(n_k)_{k\geq 1}$ une suite d'entiers tous ≥ 1. On note $N_k=\sum_{1\leq i<k} n_i$ pour tout $k\geq 0$. On a alors un isomorphisme d'anneaux

$$\left\{\begin{array}{ccc} M(A) & \xrightarrow{\sim} & M\left(\left(M_{n_p,n_q}(A)\right)_{p,q\geq 1}\right) \\ M & \longmapsto & \left(\left([M]\binom{x+N_{p-1}}{y+N_{q-1}}\right)_{1\leq y\leq n_q}^{1\leq x\leq n_p}\right)_{p,q\geq 1} \\ \binom{N_{p-1}<x\leq N_p}{N_{q-1}<y\leq N_q}\mapsto [M_{p,q}]\binom{x-N_{p-1}}{y-N_{q-1}} & \longleftarrow & \left(M_{p,q}\right)_{p,q\geq 1} \end{array}\right. .$$

Démonstration.
L'application $\longleftarrow$ est bien défini vu la bijection

$$\mathbb{N}^{*2}\cong\left(\coprod_{p\geq 1}]N_{p-1},N_p]\right)\times\left(\coprod_{q\geq 1}]N_{q-1},N_q]\right).$$

Fixons ensuite deux matrices Λ et M, deux entiers $p,q\geq 1$ et deux entiers $\binom{1\leq x\leq n_p}{1\leq y\leq n_q}$. On a d'une part

$$\begin{aligned} \left[[\varphi(\Lambda M)]\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= [\Lambda M]\begin{pmatrix}x+N_{p-1}\\y+N_{q-1}\end{pmatrix} \\ &= \sum_{\bigstar\geq 1}[\Lambda]_{\bigstar}^{x+N_{p-1}}[M]_{y+N_{q-1}}^{\bigstar} \\ &\overset{\mathbb{N}^*=\left(\coprod_{k\geq 1}]N_{k-1},N_k]\right)}{=} \sum_{k\geq 1}\sum_{N_{k-1}<\bigstar\leq N_k}[\Lambda]_{\bigstar}^{x+N_{p-1}}[M]_{y+N_{q-1}}^{\bigstar} \\ &\overset{\bigstar\leftarrow\blacktriangle+N_{k-1}}{=} \sum_{k\geq 1}\sum_{1\leq\blacktriangle\leq n_k}[\Lambda]_{\blacktriangle+N_{k-1}}^{x+N_{p-1}}[M]_{y+N_{q-1}}^{\blacktriangle+N_{k-1}}, \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} \left[[\varphi(\Lambda)\varphi(M)]\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= \left[\sum_{k\geq 1}[\varphi(\Lambda)]\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix}\times[\varphi(M)]\begin{pmatrix}k\\q\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \\ &= \sum_{k\geq 1}\left[[\varphi(\Lambda)]\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix}\times[\varphi(M)]\begin{pmatrix}k\\q\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \\ &= \sum_{k\geq 1}\sum_{1\leq\blacktriangle\leq n_k}\left[[\varphi(\Lambda)]\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x\\\blacktriangle\end{pmatrix}\times\left[[\varphi(M)]\begin{pmatrix}k\\q\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\blacktriangle\\y\end{pmatrix} \\ &= \sum_{k\geq 1}\sum_{1\leq\blacktriangle\leq n_k}[\Lambda]_{\blacktriangle+N_{k-1}}^{x+N_{p-1}}[M]_{y+N_{q-1}}^{\blacktriangle+N_{k-1}},\ \text{CQFD.} \end{aligned}$$

commencer par $\begin{matrix} A & A & X \\ A & A & X \end{matrix} = ...$

Puis donner exemple suivant : si A est une matrice carré inversible de dim n, et qu'on pose $E = D - CA^{-1}B$, alors $\begin{pmatrix} 1 & \\ CA^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \\ & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & A^{-1}B \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ qui permet de faire l'inversion d'une matrice 2n*2n via l'inversion de matrices n*n (rq : on montre ainsi que det $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ s'annule comme det $\left(D - CA^{-1}B\right)$.

transposition par blocs

EXO : A commute avec $\operatorname{Diag}(\lambda_1 \operatorname{Id}, \lambda_2 \operatorname{Id}, ..., \lambda_p \operatorname{Id})$ où les λ_i sont $\neq$ ssi A est diagonale par blocs adaptés aux λ_i.

COR : A commute à une matrice diagonale ssi son support est inclus dans $I_1 \times .. \times I_r$ où $I_k = \{i \ ; \ \lambda_i = \lambda_k\}$ supposés $\lambda_1, ..., \lambda_r \neq$.

EXO : CNS pour que rg $\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} = r$ sachant que $A \in GL_r$?

On regarde déjà le noyau : $\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} \in \operatorname{Ker} M \iff \begin{matrix} X = -A^{-1}BY \\ Y \in \operatorname{Ker}\left(D - CA^{-1}B\right) \end{matrix}$, donc on a un iso $\operatorname{Ker}\left(D - CA^{-1}B\right) \longrightarrow \operatorname{Ker} M$ avec $Y \longmapsto \begin{matrix} -A^{-1}BY \\ Y \end{matrix}$ d'où

$$r = \operatorname{rg} M = n - \dim \operatorname{Ker}\left(D - CA^{-1}B\right) = n - \left(r - \operatorname{rg}\left(D - CA^{-1}B\right)\right),$$

donc $D = CA^{-1}B$.

Réciproque : on multplie par $\begin{matrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ & 1 \end{matrix}$, ce qui ne change pas le rang et donne la matrice $\begin{matrix} 1 & \\ CA^{-1} & D - CA^{-1}B \end{matrix}$.

2 Matrices remarquables

la base canoniqu de M_n est celle de K^{n^2} transportée par n'importe quel iso $M_n(K) \simeq K^{n^2}$.

L'algèbres des matrices $n \times n$ diagonales est isomorphes à K^n, donc est commutative.

S_n n'est pas une algèbre car pas stable par produit : $\begin{matrix} & 1 \\ 1 & \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & \\ 1 & 1 \end{matrix}$. Plus précisément, à quelle condition le produit de deux matrices symétrique est-il symétrique ? $ST \overset{?}{=} {}^t(ST) = {}^tT\ {}^tS = TS$ ssi S et T commutent.

$S_2 = AS_2$ en carac 2

distinguer triang sup et triang inf : mais on dira toujours triang pou triang sup

NOter T_n^+ pour les supérieures : interpréter en termes de drapeaux ;

La matrice $J :=$ que des 1 vérifie $J^2 = nJ$, ie $\frac{J}{n}$ projectur

APP : montrer les $aI + (b-a)J$ forment une algèbre et donner sa dim. C'est $K \oplus KJ = K[J]$ car $J^2 \in K + KJ$ de dim 2

matrics de permutations :permutent les coordonnes $P_\sigma((a_i)) = \left(a_{\sigma(i)}\right)$ ou $P_\sigma e_i = P_\sigma$pour avoir $P_\sigma P_\rho = P_{\sigma\rho}$ (on peut aussi permuter les places, mais alor **anti-**morphsime) ; Alors $P_\sigma = \left(\delta_j^{\sigma(i)}\right)$ (verfier quand me^me...). ENgendré par les mat de *transposition* (qui sont élémenttaires). Cas des *cycliques* (donner def gné de *cyclique*)

3 matrices & Applications liéniares

Dire que on prend un vecteur de la base de départ, on tape dessus avec le marteau AL, d'où l'image qui se rèvèle : on a tout plein de scalaires qui tombent.

très important l'iso $M_n \simeq L$ par le choix d'une base, de même pour $K^n \simeq E$, et ces iso sont compatibles –> on laise tomber la parenthèses fonctionnelle car tout devient multiplication.

commencer soft pour les matrices d'endo : dérivations, puis $u : \begin{array}{cc} R_3[X] & R_2[X] \\ P & (X+1)P'' \end{array}$, $u(X+1)^3$?

TAPIS ROULANT ! ! !

Une matrice A est identifiée à l'endo $A\cdot$ de $K^{(N)}$ et induit des iso $M_{a,b}$ et $L\left(K^b, K^a\right)$–> transport de Ker, Im, rg.

pour $\mathrm{Mat}_{B,C}\, f$, écrire aussi $[f]_C^B$, pour avoir la simplification $\frac{1}{C} = \frac{B}{C}\frac{1}{B}$

$$[f(x)]_C = [f]_C^B\,[x]_B\,.$$

$[vu]_{B,D} = [v]_{C,D}\,[u]_{B,C}$ (mettre dabord u et v puis les bases tombent) ou encore $[vu]_D^B = [v]_D^C\,[u]_C^B$

Application : on prend $Kx \overset{i}{\hookrightarrow} E \overset{f}{\longrightarrow} F$. Alors $[i]_{x,B} = \mathrm{Mat}_B\, x$ et $[f \circ i]_{x,C} = \mathrm{Mat}_C\, f(x)$.

Soit A et B deux polynômes de degé a et b. On regarde l'idéal $(A)+(B)$ comme image de $\begin{array}{ccc} K_{a-1}[X] \times K_{b-1}[X] & \longrightarrow & K_{a+b-} \\ (U,V) & \longmapsto & AU + \end{array}$
Comme mêmee dimension $a+b$, surjecitif ssi det $=:\mathrm{Res}(A,B)$ non nul. Or, Surjectif ssi idéal=anneau, donc ssi $1 \in \mathrm{Im}$, ie ssi A, B premiers entre eux.

Application : un pilynôme est séparable ssi $\mathrm{Res}(P,P') \neq 0$.

EG : pour $P = X^3 + pX + q$, on trouve $27q^2 - 8p^3$.

EXO *: endo tq toute matrice ait une entrée* $(2,1)$ *nulle ?* CEG : une diagon de 1 en de-sous la diago principale, ie une base cycliqyue. Pour retrouver cela, si pas homo, $\exists x \mathrm{pascol} f(x)$, puis on complète en base.

EXO *endo tq toute matrice ait une entrée* $(1,1)$ *nulle ?* Fixons une base $a, b, c, \ldots$. Alors $u(a)$ n'a pas de coordonée en a, et cela quelle que soit la base choisie. En appliquant cela à la base $(a, a+b, c\ldots.)$, si $u(a) = 0a + ?(a+b) + \ldots$ le ? est nul, donc pas de coordonée en b. En appliquant cela à $(a, b, c+b, d, ..)$ et si $u(a) = 0a + 0b + ?(c+b) + \ldots$, le ? est nul, etc... Ainsi l'endo est nul.

4 Formules de passages

$A' = Q^{-1}AP$

dem : $u = \mathrm{Id}_F\, u\, \mathrm{Id}_E$, d'où $[u]_{C'}^{B'} = [\mathrm{Id}_F]_{C'}^{C}\,[u]_C^B\,[\mathrm{Id}_E]_B^{B'}$

pour les application linéaires, il y a *deux* bases : les ev de départ et d'arivée n'ayant rien à voir, ce serait un non sens de considérer une base commune !

des arguments de taille permettent de donner l'ordre de Q et P

pour retenir le -1, éventuellement : en notant Bpour A', si vous êtes AP (happé) par la prépa, vous risquer de QB (= faire 5/2 pour les khagneux)

$A' = P^{-1}AP$

les couples de bases deviennt des bases => Q devient P

ou retenir $\mathrm{Mat}_{B'} = P(B', B)\,\mathrm{Mat}_B\, P(B, B')$ –> joli chasles

$X' = P^{-1}X$

on laisse ce qui fait sens (matrice carré x mat col = mat col)

Eg : chantenemnet d'équation $xy = 1$ après roation des axes de 45 degrés ;

angle d'Euler ?

EXO : puissances de $\binom{i}{j}$? C'est la matrice de passage de (X^n) dans $((X+1)^n)$. Donc itérer k fois revient à décire la base $((k+X)^n)$.

5 Matrices équivalentes et semblables

$Diag\,(1,0,...,0)$ et $diag\,(0,...,0)$ avec un 1 à la place $(1,2)$ sont eq car meme rg 1, mais pas semblable car traces différentes.

EXO : $\begin{matrix} 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$ et $\begin{matrix} 1 & \cdot \\ 1 & \cdot \end{matrix}$ sont semblables ? Même tr, rang, det –> deux proj. Mmee rang, donc semblabe.

EXO (GEN) : cas 2×2 : si pas homo, choix de base cyclique, d"où $\sim \begin{pmatrix} 0 & -\det \\ 1 & \mathrm{tr} \end{pmatrix}$. Ainsi, deux non-homo sont semblable ssi même tr et même det.

6 Opérations élémentaires - calcul du rang

Pour mq $A\mathrm{eq}J_r$, on peut récurrenr et calculs blocs. Il suffit de mq $A\mathrm{eq} \begin{matrix} 1 & ? \\ 0 & \text{bloc} \end{matrix}$ (si $A \neq 0$)

Pour calculer un rang, on fait apparaitre des 0, et on les alignes, pour pouvoir utilise le lemme rg $\begin{matrix} 1 & * \\ 0 & A \end{matrix} = 1 + \mathrm{rg}\, A$.

Attentsion : pas généralisable à rg $\begin{matrix} A & * \\ & B \end{matrix} = \mathrm{rg}\, A + \mathrm{rg}\, B$ (prendre $A = 0$, $* \in GL$ et $B \notin GL$)

$\mathrm{rg}\,({}^tA) = \mathrm{rg}\,({}^t\,(PJQ)) = \mathrm{rg}\,({}^tQJ^tP) = \mathrm{rg}\, J = \mathrm{rg}\, A$.

$\mathrm{rg}\,(A+B) \leq \mathrm{rg}\, A + \mathrm{rg}\, B$
$\mathrm{rg}\, AB \leq \mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, B$
(démo : on passe aux endo)

on obtient des inverses de matrices en regadant la combinatoire des transformations.
On calcul beaucopu plus vite...

pour retenir sur quoi agit par multiplication :

1. gauche –droite (sens de lecteur des coordonnées)
   ligne - colonne (sens de lecteur en français)
2. On peut aussi réécrire rapidement $\begin{matrix} \lambda & \\ & 1 \end{matrix}\; A$ et tracer un trait horitnal à droie du λ –> agir sur les lignes
3. On peut aussi noter que 'd' est plus proche de 'c', 'g' est plus proche de 'l'
4. l y a un 'g' dans "gauche" et dans "ligne" et un "o" dans "droite" et dans "colonne
5. A retenir c'est MV pour l'image du vecteur colonne V par la matrice M. Du coup, il devient évident qu'une multiplication à droite (par plusieurs V concaténés) agit sur chaque colonne indépendamment. De même, opérations sur systèmes (agissent sur les lignes)
6. penser "gueule de con" et regarder les consonnes (sauf la dernière) : g, l, d, c, comme "gauche, ligne, droite, colonne".

transvection : on transplante les vecteurs. FAire un dessin en dim 2 et 3.
retenir $\left\{ \begin{array}{l} L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j \\ C_j \longleftarrow C_j + \lambda C_i \end{array} \right.$, les indices (i,j) correspondent à (L,C).

Dès qu'on a les opérations sur les lignes, on a celles sur les colonnes **par transposition**.

Générateur de l'algèbre $M_n\,(K)$.

la matrice avec des 1 sur la diagonale immédiatement au-dessus de la diagonale supérieure (et des 0 partout ailleurs) et sa transposée.

Si on appelle A et B ces deux matrices, on a $A^k B^k$ la matrice diagonale avec k fois 1 puis $n-k$ fois 0. On peut alors engendrer toutes les matrices de la forme $(1, ..., 1, 0, ..., 0)$ sur une ligne parallèle à la diagonale (et 0 ailleurs), et donc tous les $E_{i,j}$.

(cf exo rédigé)

les matrices de rangs 1 sont les produit col/lin

Pour inverser matrice, on résoud système –> autant écrire juste les tranfosmation à partir de l'identité, c'est pareil.

pour inversser une matrice A (ou caculer son rang) on pose A et Id, puis on fait des tranvection sur A que l'on appliquer sur I. Quand on a à gauche une matrice trig, on lit l'aimge, et le noyau se lit à droite A CONDITION QUON JOUJOUTE LES **COLONNES**

7 Rang et matrices extraites

mq $\operatorname{rg} A = r \implies \exists$ extraite inversible de taille r : soit $C_1, ..., C_r$ base de $\operatorname{Im} A$. Les n lignes sont de rg r, donc on extrait r lignes des r collonn, CQFD.

!!! rg nul n'implqiue pas forcément non inversible : penser à l'endo nul de l'ev nul !

8 Système affines

on dit *linéaires* mais rien de plus affine... (sauf si second membre nul)

existence soluton indépednant du corps de base : car le rang idem.

EXO : Soient $1 \leq k < n$ des enteirs. On considère n inconnues dont la somme de k quelconques d'entre elles est nulle. Montrert que tout le monde est nul.

DEM : il suffit de montrer le résultat pour $k = n-1$;en effet, on l'appliquera alors à $k+1$ inconnue arbiraitres qui seront toutes nulles. Supposons $k = n-1$. On additionne les n éuqion, d'où $(n-1)\sum x_i = 0$. Or, $\sum x_i$ vaut x_i plus la somme des $n-1$ autres qui est nulle, d'où $x_i = 0$.

9 Plus loin

inversion de matrices triangulaire infinies (eg de bases de polynômes)

plus général : une matrice sur $I \times J$ est un élément de $K^{(I \times J)}$.

Exo sur nilpotents. *Pour tous entiers d et n, il existe un entier k tel que pour tout anneau commutatif A et toute matrice $M \in M_d(A)$ telle que $M^n = 0$, on ait $(\operatorname{tr} M)^k = 0$.*

(On peut considérer la matrice « universelle » $N_{d,n} = (A_{i,j})$ de taille d nilpotente d'ordre $\leq n$, elle est à coefficients dans un anneau quotient B de $\mathbb{Z}[A_{i,j}]$ par les relations qui disent que les coefficients de $N_{d,n}^n$ sont nuls. Le raisonnement fait dans le cas des corps montre que la trace de $N_{d,n}$ appartient au nilradical de B, ce qui permet d'obtenir le k cherché.)

Que peut-on dire de k en fonction de d et n ? Expérimentalement, il semblerait que (le plus petit) $k = dn - d + 1$.

Je peux montrer ça pour les matrices diagonales (ce qui, du coup, prouve que le plus petit k pour l'ensemble des matrices ne peut pas être strictement plus petit que la formule annoncée). En effet, je considère la matrice $d \times d$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont d nilpotents $u_1, ..., u_d$ chacun dont la puissance n-ième est nulle mais sans autre relation entre eux, bref, je me place dans l'anneau ${}^{K[u_1,...,u_d]}\!/\!_{(u_1^n,...,u_d^n)}$, avec K disons un corps (qui est de dimension n^d sur K avec pour base les monômes en les u_i dont aucun degré partiel ne soit $\geq d$). Sa trace est la somme $\sum u_i$ de ces nilpotents, et quand on l'élève à la puissance k on obtient à des coefficients entiers près la somme de tous les monômes de degré total $\leq k$ en ces u_i : or le principe des tiroirs me dit que si je répartis un degré total $dn - d + 1 = d(n-1) + 1$ entre d degrés partiels, il y a forcément un degré partiel de n ou plus, alors que je peux répartir un degré partiel moindre. Du coup c'est bien là le k optimal pour les matrices diagonales.

>> (Je n'ai pas réfléchi plus que ça ; instinctivement, j'aurais dit que $k = n$ aurait suffi.)

Du coup, ceci était idiot : l'exemple de la matrice de diagonale (u, v) avec $u^2 = v^2 = 0$, qui a pour trace $u + v$ dont le carré est $2uv$, pas forcément nul, le montrait immédiatement.

On me fait remarquer (via un commentaire sur mon blog) que la réponse, avec une démonstration extrêmement courte, est là : <URL :http ://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/mamarim/mamarimhtml/gert.html

.

Pour ceux qui ont la flemme de regarder le papier, ou pour la complétude de forum, je vous la refais : si A est un anneau commutatif et $M : A^d \longrightarrow A^d$ linéaire, $\operatorname{tr} M$ agit par multiplication sur $\bigwedge^d A^d$ (la puissance extérieure maximale de A^d) qui envoie $x_1 \wedge \cdots \wedge x_k$ sur la somme des d termes obtenus en remplaçant un des x_i par $f(x_i)$ dans ce produit extérieur (c'est facile de s'en convaincre en regardant sur la base canonique, par exemple). Il s'ensuit que $(\operatorname{tr} M)^N$ agit sur $x_1 \wedge \cdots \wedge x_d$ en l'envoyant sur tous les termes obtenus en appliquant N fois f à l'un des x_i – mais si $N > d(n-1)$, il y aura forcément un des x_i auquel on aura appliqué strictement plus que $n - 1$ fois f, donc on trouve 0. Autrement dit, pour $N \geq dn - d + 1$, $(\operatorname{tr} f)^N$ opère comme l'application nulle sur $\bigwedge^d A^d$. Et comme $\bigwedge^d A^d$ est simplement A, ceci démontre que $(\operatorname{tr} f)^N$ est bien nulle.

(plus haut, on a montré (par un raisonnement étonnamment semblable, d'ailleurs, avec le même principe des tiroirs) que réciproquement, si $N \leq dn - d$, il y a des matrices $d \times d$ nilpotentes de rang n dont la trace n'est pas nilpotente de rang N).