Dimension finie
(version chantier)

Marc SAGE

25 mars 2006

Table des matières

bases = famil libre max = familel géné min, du coup existence en dim finie triviale. Alors gen => # > N et libre => # < n

Parler un peu de somme externe !

somme directe : unicité d'une décomposition, on peut parler des composantes selon tel sev

base : somme directe de droites

deux sev sont supplémentaire ssi "leurs" bases sont complémentaires –> on casse tout en droites, donc ce qui compte est le nombre de droites, pas le nombre de points en tout, d'où l'idée de la dimension.

$\dim F = \dim G$ => il y a supp commun : démo possible avec descriptino explicite des sev ? ? ? (cf EXO ev ou théorie dim)

Décrire $L(R, R)$, puis $L(R, R^n)$ et $L(R^n, R)$ (lien avec eucliden dual tout ça), d'où $L(R^n, R^p)$ en général

il y a beaucopu de parallèle entre ensmble de card fini et ev de dim fine

card dim

$\biguplus$ $\bigoplus$

card $\biguplus$ = dim $\bigoplus$

compl supp

$|A \cup B|$ grassmann (mais on n'a pas le crible !)

eq entre inj bij surj eq entre inj bij surj

Aut Aut (pas réciproque : il y a plusisuers bases...)

shift dans N tapis roulant dans $K^{(N)}$

1 Généralités

(en dim finie)

$(e_i)_{i\in G}$ géné, $(e_i)_{i\in L}$ libre, $L \subset G$. Alors il y a $L \subset B \subset G$ tq $(e_i)_{i\in B}$ base.

(dem : on prend sur famille de L maximale ou une sous-famille de G minimal, et si G ∞ on utilise $\dim E < \infty$)

;Cor (th base incomplète) toute famille libre se complète en une base ($(e)_{e\in E}$ géné)

Cor (th base extraite) toute famille géné contient une base ($\emptyset$ est libre)

cor : en dim finie, il y a des bases.

COMPARER au lemme de l'échange puis extraction : peut-être ce qui précède est mieux pour résumer.

LEmme : $n+1$ CL de n vecteurs est toujour liée

tout ev de dim n est iso K^n par le choix d'une base ($\overrightarrow{\lambda} \mapsto \sum \lambda_i e_i$), lequel n'a rien de canonique.

eg : $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 7u_n$.

$\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-ev de dim infinie, sinon il serait dénombrable

géné $\implies \# \geq n$ (mais $(a, a, a, a..., a)$ pas géné)

libre $\implies \# \leq n$ (mais $(0, a)$ pas libre)

donc une famille de card n est base ssi géné ssi libre (eg, $(1, 1)$ et $(0, 1)$ dans K^2, au choix)

même dimensin => supplémentaire commun : on rajoute des vecteurs non liés tant qu'on peut.

tout sev de dim d est intersection de $n-d$ hyperplans, et plus généralement de $k+1$ sev de dim $d+k$. (une droite est intersection de deux plans) Ecrire $F = \bigoplus K f_i$,compléter avec $(e_c)_C$ chosir $k+1$ parties de C dont l'intersection est vide (considérer $c+1$ éléments et les partie (tous sauf un)) et rajoter F.

2 Calcul de dimensions

dim est strcitement croissante
$\dim \bigoplus = \sum \dim$, $\dim (E \times F) = \dim \left(K^a \times K^b\right) = a + b$.
dim est sous-aditive : $\dim \sum V_i \leq \sum \dim V_i$ (appliuqer th rg à la surjection $\prod V_i \twoheadrightarrow \sum V_i$)
exisence et dim d'un supplémentaire
$\dim L(E, F)$, $\dim L(E)$ (faire à la main les cas E et $F = K$ pour intuiter)
$\dim E \diagup F$

Grassmann : faire un dessin avec deux plans s'intersectant le long d'une droite (démo de Gilles ? ? ?)
Soit E un ev de dim finie, F et G deux sev. Montrer que

$$\dim (F + G) + \dim (F \cap G) = \dim F + \dim G.$$

Peut-on généraliser à une sommes de trois sev ?
Solution proposée.
Soit $(h_1, ..., h_r)$ une base de $F \cap G$, que l'on complète d'une part en une base $(h_1, ..., h_r, f_1, ..., f_p)$ de F et d'autre part en une base $(h_1, ..., h_r, g_1, ..., g_q)$ de G. Sur un schéma :

$$\underbrace{f_1, ..., f_p, \overbrace{h_1, ..., h_r}^{F \cap G}}_{F}, g_1, ..., g_q,$$

$$\underbrace{f_1, ..., f_p, \overbrace{h_1, ..., h_r, g_1, ..., g_q}^{G}}_{F+G},$$

il apparaît clairement que

$$\left\{ \begin{array}{c} \dim F = p + r \\ \dim G = q + r \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{c} \dim (F \cap G) = r \\ \dim (F + G) = p + q + r \end{array} \right.$$

(il faudrait juste montrer proprement pourquoi $(f_1, ..., f_p, h_1, ..., h_r, g_1, ..., g_q)$ est une base de $F + G$:), d'où la formule recherchée.
Autre solution : on introduit le morphisme $F \times G \twoheadrightarrow F + G$ de noyau $(i, -i)$ où i décrit $F \cap G$.

Bien voir que la théorie de la dimensino permet de faire de la combinatoire des bases, d'où les résultas analogues à ceux des ensembles finis.
E. g. : $A + B = A' \oplus (A \cap B) \oplus B'$
parallèle ensembliste$A \cup B = A' \sqcup (A \cap B) \sqcup B'$
(ceg, grassmann ne marche pas pour > 2 sev, car le $+$ n'est pas distrib sur $\cap$)
ON pourra introduire la notation $E = \boxed{e_1}\boxed{e_2}...\boxed{e_n}$ (le K est inutile)

Montrons que $\operatorname{Card} K^{(D)} = \max \{D, K\}$ pour D ensemble infin :, une famille presque nulle de scalaires indexée par D corespond de manière bijective à une partie finie de $D \times K$. Or, si X est infini, on a une surjection évidente de X^n sur l'ensemble des parties de X à au plus n éléments, lequel se surjecte sur l'ensemble des parties de X à exactement n éléments, de sorte que ce dernier s'injecte dans X^n, donc est de cardinal $\leq |X^n| = |X|^n = |D^n|$, l'inégalité dans l'autre sens étant évidente. Faisant la réunion sur les $n \in \mathbb{N}$, on voit que $K^{(D)}$ est réunion dénombrable d'ensembles chacun équipotent à $D \times K$, donc est de cardinal $|D \times K| = |D| |K| = \max \{D, K\}$, *CQFD*.
Ainsi, $|E| = \left|K^{(\dim E)}\right| = \max \{|K|, \dim E\}$.

3 Rang et application

le rg est un autre terme pour dimension (depend de l'ev externe : il faut que 0 soit dans la partie : attentin aux droites affines de rg 2...). On notera donc $\operatorname{rg} A := \dim \operatorname{Vect} A$. Le rang d'un sev est alors sa dimension.
rq : le rang d'une famille est le sup des cardinaux des sous-famille libres.

Une applicaion linéaire conserve le rg ssi elle est injective

$\mathrm{rg}\,(e_i) \leq |I|$ avec $=$ ssi e_i libre

$\mathrm{rg}\, f \leq \dim F$, clair. LE th du rg mq $\mathrm{rg}\, f \leq \dim E$ (avec $=$ ssi f inj) : une application liénaire ne peut pas créer de la dimension ! (FAire le parallèl avec les carindaux finis : l'image d'un applcation définie sur un ensemble fini est également finie.)

cor : en dim finie, endo est inj ssi bij ssi surj. IMPORTANT : facile de calculer un noyau, difficil de montrer une existence, on montre inj pour utiliser surj. FAUX en dim infinie : tapis roulant, ou encore $f \mapsto xf\,(x)$ si f C^0

$\mathrm{rg}\, fg \leq \mathrm{rg}\, f, \mathrm{rg}\, g$, avec $=$ si f ou g iso

EXORéciproquemnt, $\forall f, \mathrm{rg}\, fg = \mathrm{rg}\, gf$ ssi g inversible ou nul.

Insister sur le vrai théorème du rang. Le traditionnel "théorème du rang" s'énonce $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{codim}\,\mathrm{Ker}\, u$, mais sa véritable substance réside en ce que $u_{|S} : S \longrightarrow \mathrm{Im}\, u$ est un isomorphisme, il faut donc absolument comprendre ce qui précède (tout en sachant par ailleurs utiliser la formul $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{codim}\,\mathrm{Ker}\, u$...). A ce propose, commencer déjà par le cas isomorphisme (puis s'y ramener en s'éloignant du noyau).

Th du rg : n bonhommes partent de E vers F. En chemin ils rencontrent l'obstacle noyau qui en tue : il reste r survivants, modifiés par l'action offensive de u (dessin).

C'est formcément $\dim E$ à drote car on peut augmenter F sans changer f.

EXO : suppoons $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}\, w$ avec $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$: alors $\{v\ ;\ w = vu\}$ est un sea de dim $\mathrm{corg}\, u \dim G$

dans K-algèbre de dim finie, inversible $\iff$ inversbile à dte/gauche $\iff$ régulier à droite/gauche. Intéret : ne faire qu'une véirifacation.

cor : si de plus K intégère, K est un corps. Eg : $Q\left[\sqrt{2}\right]$, $Q\left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right]$ (intègre car inclus dans R)

4 Codimn, hyperplans et dualité

pourquoi dualité ? on a $E \simeq L\,(K, E)$, on reverse les flèches,dc on regade $L\,(E, K)$

dualité : on complète supplémaentaire du noyau, on prend l'image, et on complèe : alors $\mathrm{rg}\,({}^t u) = \mathrm{rg}\,\{f_1^* \circ u, ..., f_n^* \circ u\} = \mathrm{rg}\,\{f_1^* \circ u, ..., f_r^* \circ u\}$ car $k > r \implies f_k^* \circ u = 0$; puis $\sum_1^r \lambda_i f_i^* = 0 \implies \overrightarrow{\lambda} = 0$ en évaluant en e_i. D'où $\mathrm{rg}\,({}^t u) = \mathrm{rg}\,(u)$.

Autrem méthode : $\mathrm{rg}\,({}^t u) = \dim \mathrm{Im}\,({}^t u) = \dim\,(\mathrm{Ker}\, u)^{\perp} = \mathrm{codim}\,\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{rg}\, u$ par le th du rang.

rappel : Deux supplémentaires sont toujours isomorphes, donc si l'un deux est de dim finie, on parle *de codim finie*.

un hyperplan est un sev de codim 1

PROP : eq à $\exists D, H \oplus D = E$, $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$ où $\varphi \neq 0$.

Une application $K^n \longrightarrow K, \overrightarrow{x} \mapsto \sum \lambda_i x_i$ a une expression qui a une "forme" linéaire. D'où le nom.

Eg : évaluation, e_i^*.

Formule $\varphi = \sum \varphi\,(e_i)\, e_i^*$

Pour montrer $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\psi \iff \varphi \| \psi$, on prend une base commune complétée (si pas possible, $\varphi = \psi = 0$) avec a : alors $\frac{\psi}{\psi(a)}$ et $\frac{\varphi}{\varphi(a)}$ coincident sur a et H, donc partout.

GEN : soit $\varphi_1, ..., \varphi_r \in E^*$ libre et $\varphi := (\varphi_1, ..., \varphi_r) : E \longrightarrow K^r$: mq φ surj (d'où $r = \mathrm{rg}\,\varphi = \mathrm{codim} \bigcap \mathrm{Ker}\,\varphi_i$) : si faux, on inclut $\mathrm{Im}\,\varphi \subset H$ d'éq $\sum a_i x_i = 0$, d'où $\sum a_i \varphi_i = 0$.

(plus générale : $\mathrm{rg}\,\varphi = \mathrm{rg}\,\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$: OPS $\varphi_1, ..., \varphi_r$ libres, d'où $\forall k > r$, $\varphi_k = \sum_1^r \lambda_k^i \varphi_i$, et $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Vect}_{i=1,...,r}\left(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0, \lambda_i^{n-r+1}, ..., \lambda_i^n\right)$)

(en dim finie : on peut prendre les matrices : si $A = \mathrm{Mat}_{e_i^*}(\varphi_1, ..., \varphi_r)$, alors $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\,\varphi$ et $\mathrm{Ker}\, A = \bigcap \mathrm{Ker}\,\varphi_i$)

COR : $\bigcap \mathrm{Ker}\,\varphi_i \subset \mathrm{Ker}\,\psi$ ssi ψ lié aux φ_i ($\Longleftarrow$ clair, pour $\implies$, en notant $\varphi_0 := \psi$, on a $\mathrm{rg}\,(\varphi_i \cup \psi) = \mathrm{codim}\,(\bigcap \mathrm{Ker}\,\varphi_i \cap \mathrm{Ker}\,\psi) = \mathrm{codim} \bigcap \mathrm{Ker}\,\varphi_i = \mathrm{rg}\,\varphi_i$)

Version affine : soit $H_i = \{\varphi_i = a_i\}$: alors si $\emptyset \subsetneq \bigcap H_i \subset H, \exists \lambda,\ \varphi - a = \sum \lambda_i a_i$ (dem : $\bigcap H_i$ sea de directio $\bigcap \mathrm{Ker}\,\varphi_i$, d'où $\bigcap \mathrm{Ker}\,\varphi_i \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$ et $\varphi = \sum \lambda_i \varphi_i$: on évalue en un point $a \in \bigcap H_i$ et on prend la différence)

APPL : plans contenant une droite donnés (eg avec la sphère ?)

$\{sev\}$ est muni de $+$ et $\cap$ (pas anneau car sous-distributif : prendre trois droites distinctes coplanaires) (pas anneau car + pas régulier : même cEg).

Les droites sont une familles géné pour +

Les hyperplans sont une familles géné pour $\cap$

–> la codim est le nombre d'équtaion (indépdant) décrivant un sev donné

Dim ∞ : R et C vus comme des Q ev ont meˆme dimension, donc sont isomorphes, donc les groupes additfs R et C sont isomorphes :-)

de même, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \mathbb{R} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$