Espaces vectoriels
(version chantier)

Marc SAGE

<2015

Table des matières

Pourquoi un noyau se note-t-il Ker ?

Ker ne vient pas mot du breton signifiant « maison », mais de l'allemand Kern, signifiant tout simplement « noyau ». En anglais, le noyau se dit aussi kernel, signifiant "amande" dans le civil.

Le terme vient d'affinité, introduit par Léonard Euler en 1748, qui remarque (en français dans le texte) que deux courbes obtenues l'une de l'autre en changeant l'échelle des abscisses ne sont pas semblables, mais qu'elles ont quand même une certaine « affinité ».

K-ev : groupe additif sur lequel K opère par une lce $\cdot$ telle que

$\cdot$ est associtavie (donc $\lambda\mu a$ aucune ambiguité), admet un neutre (nécesairemnt 1_K), et distributive sur $+$.

On peut montrer que $+$ est abélien :

$$a+b+a+b=1\,(a+b)+1\,(a+b)=(1+1)\,(a+b)=(1+1)\,a+(1+1)\,b=a+a+b+b.$$

(mieux : y+x = (-1)·(-(y+x)) = (-1)·(-x-y) = x+y, mais suppose montré -1.x=-x)

Parallèle avec anneau (unitaire) : groupe additif & mono multmpliatif tq $\times$ est distributive sur $+$

On peut montrer que $+$ est abélien (si unitaire !) : meme démo.

NEUTRE est indépendant des autres : prendre l'action nulle, ou $\lambda \cdot (a,b) := (\lambda a, b \text{ou} 0)$. Dans ces cas, on peut toujours considérer $a \mapsto 1 \cdot a$ et à l'arrivée on a un vrai ev. Réciproquement, soit E ev sans neutre et $\overline{E} := 1 \cdot E = \bigoplus K a_i$. On montre à la main que $E = (\operatorname{Ker} \pi) \oplus (\bigoplus K a_i)$.

ASSO est indépendant : on fait agir $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ par $\lambda \cdot x = p(\lambda)\,x$ où p additif non multiplicatif, eg projecttion sur $\mathbb{Q}$ parrl à un suppl, eg Re si $K = \mathbf{C}$. En effet, pour s dans ce supplémentaire, on a

$$p\left(s\frac{1}{s}\right)=p\,(1)=1\neq 0=p\,(s)\,p\left(\frac{1}{s}\right).$$

DISTRIB DROITE indéepnd : dans K considérer $\lambda \cdot x := \lambda^2 x$ (ou $\lambda^3 x$ si car $K = 2$: on a $(\lambda+\mu)^3 = \lambda^3+\mu^3$, d'où pour λ et μ distincts autres que 0 (possible sinon $K = F_2$) $3\lambda\mu\,(\lambda+\mu) = 0$ et $\lambda = -\mu = \mu$). Autre idée si $\dim E > 1$: soit D une droite vectoriell, on def $\lambda \cdot x := \begin{matrix} \lambda x \text{ si } x \in D \\ \overline{\lambda} x \text{ sinon} \end{matrix}$

DRISTEB GAUCHE indep : poser $\lambda \cdot x := x$ (si $E \neq \{0\}$)

Quetsion : distributivé à droite gauche / indépendante ?

espace vectoriel : on met des flèches bout à bout. Intuition affine immédiate (parler de l'affine dans le vectoriel à la fin du cours, pour prépare le cadre affine plus général ; de toute façon un ea se plonge dans un hyperplan affine d'un ev)

Structure linéaire pas du tout intuitive –> ce sont les axiomes d'euclide, avec les disatnces, les aires, tout ca... (dicsussion avec rémy) donc la structure **affines** qui le sont.

0 est chez tout le monde.

PAS DE MULTIPICATION : produit tensoriel, voir chapitre en question. Sinon, on parle d'algèbre

PAS DE DIVISION VECTORIELE (sauf à a rigueur dans R^2 identifiée à C) –> il faut projeter sur une droite pour récupérer un scalaire –> intérêt des formes linéaires : $\frac{a}{\varphi(a)} \mapsto 1$, donc $\frac{a}{\varphi(a)} - \frac{b}{\varphi(b)} \mapsto 0$, soit (pour éviter les pb de zéros) $\varphi(b)\,a - \varphi(a)\,b \mapsto 0$.

Notation : pas de flèches pour s'habituer. En revanche, pour parler de vecteurs de K^n, on pourra mettre une flèche afin d'alléger, par exemple $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ ou $\overrightarrow{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Cela donen des énoncé plus concis :

$$\forall \overrightarrow{\lambda} \in R^n,\ \sum \lambda_i a_i = 0 \implies \overrightarrow{\lambda} = 0.$$

Petit paragraphe affine pour résoudre $f(x) = y$ –> solution particulère + constante. Eg $f(\cdot - 1) - f = \operatorname{Id}$ (trinome), $a \times x = b$ dans $\mathbb{R}^3$

F_2^2 est réunion de trois droites, cf exo pour recouvrir ev par sev stricts

$\mathrm{Aut}\,(E) \simeq \mathfrak{S}_{\dim E}$ par le choix d'une base (mais pas canonique car pas de base canonique !)

RQ/EOX : un Q-ev est un groupe sans torsion où tout élément est divisible
EG $\prod Z/pZ$ modulo $\bigoplus Z/pZ$

1 Plan ébauché

1.1 Applications linéaires

Si u liénaire, on a $u\left(\sum \lambda_i a_i\right) = \sum \lambda_i u\left(a_i\right)$. D'où $u\left(\mathrm{Vect}\, A\right) = \mathrm{Vect}\, u\left(A\right)$.
pour montrer u linéaire, on peut faire court (si pas trop lourd) en montrant $u\left(\lambda a + b\right) = \lambda u\left(a\right) + b$.

$L\left(E\right)$ pas commutatif : cela reste des applications, quand même : tapis roulant.

Début des application liénaires : être dans le noyau = envoyé sur 0. Se familiariser avec $\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}\right) = \mathrm{Fix}\, f$, $x \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \iff f\left(x\right) = -x$, et plus génralement $x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}) \iff f\left(x\right) = \lambda x$. Exemple de la dérivation, du décalamge d'indice pour les suite (noyau = périodiques)
Ker sev Très utilie ! ! (eg suites récurrentes)
problème d'optimal fev ou paques pour les sep ! (cf. DM 6 TSI 1)

La proposition f surj ssi $\mathrm{Im}\, f = F$ est stupide, elle n'utilise pas le fait que f soit linéaire.
En revanche, f inj ssi $\mathrm{Ker}\, f = 0$ l'utilise vitalement. Même si c'est un raccouric d'une demi-ligne (donc pas très profond), cela montre qu'on comprend le linéaire (donc important de s'y habituer pour "penser" en linéaire)
Remarquer que $ff^{-1}\left(F\right) = F \cap \mathrm{Im}\, f$ et $f^{-1}f\left(F\right) = F + \mathrm{Ker}\, f$.
COR (th rg ? ?) : restreidnre à un supplémentare du noayu induit un iso sur l'image
pour la démo : $\mathrm{Ker}\, u_S = S \cap \mathrm{Ker}\, u = 0$, puis $\mathrm{Im}\, u_S = u\left(S\right) = u\left(S + \mathrm{Ker}\, u\right) = u\left(E\right) = \mathrm{Im}\, u$ (écrire dans autre sens) ;
RECIPROQUE : suppo $u_{|V}$ iso sur $\mathrm{Im}\, u$. Alors $0 = \mathrm{Ker}\, u_{|V} = V \cap \mathrm{Ker}\, u$, donc on peut trouver (AC) un supplémentaire $\mathrm{Ker}\, u \oplus V \oplus S = E$. Sens direct dit que $u_{|V \oplus S}$ iso sur $\mathrm{Im}\, u$, donc $S = 0$ et V est bien un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$.
COR : deux supplémentaire sont toujours iso. (dem : soit S et T supp de V et p le projecteur sur S pr V. Alors$T$ est supp à $\mathrm{Ker}\, p = V$, donc p iso de T sur $\mathrm{Im}\, p = S$)
Attention : l'endo nul peut être inversible :

$$\begin{aligned} 0 &\in GL\left(E\right) = L\left(E\right)^{\times} \\ &\iff L\left(E\right) = \{0\} \\ &\iff E = \{0\}\,. \end{aligned}$$

projecteurs : bijection entre couples de sev supplémentaires et idempotents. Commencer avec paires de droites.
Un projecteur s'écrit $\mathrm{Id} \oplus 0$. Ainsi, pour un exemle de ker$\oplus$image non projecteur, prendre $f \oplus 0$ où f automorphisme tel que $f^2 \neq f$, i.e ; $f \neq \mathrm{Id}$.
Pour la démo, le truc $x = x - px + px$ est ncéessaire graphiquement.
APP : si $fgf = 1 = gfg$, alors $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, g : x = x - fg\left(x\right) + fg\left(x\right)$, et $f\left(x\right) \in \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g => f\left(x\right) = fgf\left(x\right) = 0$. (cp : $g = f^{-1}$)
Un projecter récupère une *composante* (qui est un vecteur) tandis que les fl coordonées récupèreent une *coordonnnée* (un scalaire)
symétries : bijection entre couples de sev supplémentaires et involutions.
Pour la démo, le truc $x = \frac{x+sx}{2} + \frac{x-sx}{2}$ est ncéessaire graphiquement.
EG : pairs + impairs, sym (+)antisym

Parralèelemnt à : on déplace le vecteur (sur lequel on agit) paralleement à cette direction.

par rapport à : c'est le miroir

Pour montrer que 2 sev sont en sommes directes, utiliser proj ou sym : paire/impaires, intégrale nulle+ constante, formes linéaire

projecteurs "orthogaonaux" : bijection entre sev supplémentaires et n-uplet tq $p_i p_j = \delta_i^j p_i$

homothéties : agissent de manière *scalaire* (car $K \hookrightarrow L(E)$). Une $\oplus$de scalaires est un endo *diagonal* (ou parle aussi d'action *diagonale*) : explication : on décrit un endo par les images des élemnets une base, chacun décomposé dans cette base –> tableau avec rien hors diagonales (intro matrices), ils sont vraiment cool !

un proj vient toujours avec son proj dual "orthogonal". Plus généralement : si (p_i) orthognoaux, alors p_i proj sur V_i parrl $\bigoplus_{j \neq i} V_j$.

Dém Puisque $\left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^n p_i = \mathrm{Id} \\ p_i p_j = \delta_i^j p_i \end{array} \right.$, en notant $V_i := \operatorname{Im} p_i$, on a $V = V_1 + \cdots + V_n$, d'autre part $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ car

$$\begin{aligned} v_1 + \cdots + v_n = 0 &\implies P_1(x_1) + \cdots + P_n(x_n) = 0 \\ &\implies P_k P_1(x_1) + \cdots + P_k P_n(x_n) = 0 \\ &\implies 0 + \cdots + 0 + P_k P_k(x_k) + 0 + \cdots + 0 = 0 \\ &\implies P_k(x_k) = 0 \\ &\implies v_k = 0 \text{ pour tout } k = 1, ..., n. \end{aligned}$$

CEG : si p et q sont deux projecteurs, $pq = 0 \not\Leftrightarrow qp = 0$: prendre p proj $\perp$ sur F et q proj non $\perp$ sur $F^\perp$.

$L(E)$ est un anneau, seule la distributivité $u(v + w)$ posait problème. Oublier la loi $\circ$, et même la notation fonctionnelle $u(x)$ au profit de ux.

$L(E)$ est une algèbre : on a besoin de l'homogéniété pour montrer que $g \circ (\lambda \cdot f) = \lambda g f$ (compativilité des multipliations).

Eg d'endo sur l'ev $L(E)$: composition à droite par un endo fixé. Si cet endo est inv, alors on obtient une symétrie (eg, si inv=$-\mathrm{Id}$, on trouve la décomp en fonctions paires et impaires) (quis si inv=$\frac{1}{\cdot}$ ou autre ???). Si cet endo est constant on obtient l'évaluaion en cette constante –> forme linéiare.

Homothétie : rapport peut être nul car on regarde l'*anneau* des endomorphismes, pas le groupe des transformations (comem en terminale)

Question : on se donne (e_i) et (f_i) ; peut-on construire une application $e_i \mapsto f_i$ (sans donner une formule) ?

Principe : connaitre un morphisme, c'est le connaitre sur des géénrateurs. Donc si *ei* géné, il y a uncité. Cependant, les conditions de liaison sur les e_i doivent se répercutent sur les f_i, donc pas toujours existence ($1 \mapsto 0$, $X \mapsto 1$, $2X + 1 \mapsto 2$ pas possible). Cela dit $X^i \mapsto iX^{i-1}$ possible (c'es la dérivation !)

Si (e_i) libre, plus de condition de laison, donc plus de pb. (existence avec AC quand même).

Finalement on a existence et unicité si on défінti sur une **base**

—> Si $E = \bigoplus K e_i$ et $(f_i) \in F^I$, il y a une unique application $e_i \mapsto f_i$ qui est ... ssi f_i ... (inj libre, surj géné, bij base).

eg : application nulle, tapis roulant, dérivations.

CONSTUIRE un AL, c'est fiare de la COMBINATOIRE sur les bases : pour a, b libre, on éfinir $\boxed{a}\boxed{b} := Ka \oplus Kb$. Loi assoc comm neutre, et

$$\boxed{a_1 \cdots a_n} = \boxed{a_1} \cdots \boxed{a_n}.$$

Plus généralement, construire une AL en recollant des restictions sur une $\bigoplus$.

C'eest l'iso $L\left(\bigoplus V_i, V\right) \cong \bigoplus L(V_i, V)$. Au-desuss, cp oùles$V_i$ étaient des droites

Exemple de proj = $\mathrm{Id} \oplus 0$, symétrie = $\mathrm{Id} \oplus - \mathrm{Id}$, affinité = $\mathrm{Id} \oplus \lambda \mathrm{Id}$.

Pratique : réécrire joliment les applications :

$$(a - b + c, c - b, a - 2c) = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\bigoplus$ est préservée par préimages, par images directes si inj
(réciproquemnt, une AL commute à $\bigoplus$ si inj)

Pour restreindre des endo, il faut des sev stables.
EG ; pour restreidnre à un sev qui contient un vecteur a donné, il faut regarder $\operatorname{Vect} u^k(a)$ = plus petit sev stable par u.

1.2 Sev, vect

les sev sont exactement les noyau d'AL (intéret de $F \twoheadrightarrow E/F$ nul car mq E/Fev revient à dire que F sev ! Mais cela permet d'empecher l'existence de démo donnant un sev comme ne pouvnt pas être noyau d'une AL)

structure –> notion de sous structure : sev engendré, description externe $\langle A \rangle$ ensembliste inutile, description interne $\operatorname{Vect} A$ par les combinaisons linéaires (parler d'*enveloppe linéaire*)

$$\operatorname{Vect} A = \left\{ \sum_{\text{finie}} \lambda_a a \, ; \begin{array}{c} a \in A \\ \lambda_a \in K \end{array} \right\} = \left\{ \sum \lambda_a a \, ; \, \overrightarrow{\lambda} \in K^{(A)} \right\}.$$

(—-> notaion famile à support fini)
exemple : $\operatorname{Vect} \emptyset = \{0\}$, parties du plan, droite $\operatorname{Vect}\{a\} = Ka$, plan $\operatorname{Vect}\{a,b\} = Ka + Kb$, et plus généralement $\operatorname{Vect}\{a_1, ..., a_n\} = Ka_1 + ... + Ka_n$.
EXO : dans $E = R^R$, $VEct\{f \geq 0\}$? On sait écrire $f = f^+ - f^-$ CQFD

Prop : le vect est inchangé par opération élémetnaires (écire $a'_{i_0} \in \operatorname{Vect} a_i$, puis symétrie)

Vect est croissante et involutive sur $P(E)$. Intérêt : pour mq $A \subset V$ où V sev, il sufit de montrer que V contient des générateurs de A, car alors $A = \operatorname{Vect}(\textit{géné}) \subset \operatorname{Vect} V = V$.
Exemle : Taylor pour polynômes

On généralise $F_1 + ... + F_n$, puis $\sum_{i \in I} F_i = \{\sum_{\text{finie}} f_i \, ; \, f_i \in F_i\} = \operatorname{Vect} \bigcup F_i$, c'est le plu petit sev qui contient tout les F_i.
rq : l'application $F_1 \times ... \times F_n \twoheadrightarrow \sum F_i : (f_1, ..., f_n) \longmapsto f_1 + ... + f_n$ est surj, de même pour $\prod_{\text{support fini}} F_i \twoheadrightarrow \sum F_i$.
(remarque quelle opérations enemblistes sont compatibles avec les sev ? $\cap$ cool, $\cup$ pas cool -> on prend le vect, du coup on tombe sur la somme.)
Permet d'écrire

$$\operatorname{Vect} A = \sum_{a \in A} Ka.$$

Rq : $\operatorname{Vect}(A \cup B) = \operatorname{Vect} A + \operatorname{Vect} B$, donc $\operatorname{Vect} \emptyset$ est le neutre pour le + des sev, ied $\{0\}$.

rq : A sev ssi $\operatorname{Vect} A = A$. Du coup, "est-ce que truc est un sev ?" est une mauvaise question : il faut répondre à "que vaut $\operatorname{Vect} A$?" (parallèle avec application surjective dont il faut calculer l'image)

1.3 unicité d'un décomposaiton, somme directe, projecteurs

Question : unicité d'une décomposition ? (i.e. injectivité de $(f_i) \mapsto \sum f_i$).
contre exemple pour trois droites disctine dans le plan.

Somme directe : une famille de sev F_i sont en $\bigoplus$ si tout vecteur de $\sum F_i$ s'écrit d'une unique manière $\sum f_i$ avec $f_i \in F_i$. On note alors

$$\operatorname{Vect} F_i = \sum F_i = \bigoplus F_i.$$

Rq : notion symétrique en les F_i, donc $\bigoplus$ est commutatif.
SOus famille de $\bigoplus$ reste en $\bigoplus$

Th associativité $\bigoplus$

RQ : le produit fini est une somme directe : réaliser $E \simeq E \times \{0\}$ dans $E \times F$, introduction vers $\bigoplus$ externe.

critère pratique de somme directe pour deux sev : $F + G = F \oplus G$ ssi $F \cap G = \{0\}$.

cor : $a \notin F \implies F$ et Ka en $\oplus$.

Ne se généralise pas pour $n \geq 3$: on n'a pas équivalence F_i en $\bigoplus$ ssi $\cap F_i = \{0\}$, ni ssi $\forall i \neq j,\ F_i \cap F_j = \{0\}$ (prendre $n \geq 3$ droites distinctes dans le plan). On a bien un critère par récurrence : $F_0, ..., F_n$ en $\bigoplus$ ssi $F_1, ..., F_n$ en $\bigoplus$ et si F_0 en $\bigoplus$ avec $\sum_1^n F_i$, d'où le critère "pratique"

$$(F_i) \text{ en } \bigoplus \text{ ssi } \forall i,\ F_{i+1} \cap (F_1 + \cdots + F_i) = \{0\}$$

mais rarement utilisé en pratique (peut-être pour polynômes echelonnés en degré)

On peut cependant ramener le pb à l'unicité de la décomosition de 0 :

$$F_i \text{ en } \bigoplus \text{ ssi } \forall \overrightarrow{x} \in \prod F_i,\ \sum x_i = 0 \implies \forall i,\ x_i = 0.$$

Lorsqu'on a une somem directe, on peut parler des *composantes* (pas de coordonées) d'un vecteur selon les sev –> on casse notre ev des sev plus petits et on est ramené à étudier les composantes.

exmples

$E = \{0\} \oplus E$

$C = R \oplus iR$

$K^3 = K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus K \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus K \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

et plus gnéralemnt $K^n = Ke_1 \oplus ... \oplus Ke_n$ où e_i base canonique.

(ramarqur que la décomposiotn de C n'est autre que celle de $\mathrm{R}^2 dans la base canonique$)

$K[X] = \bigoplus_{n \geq 0} KX^n = K \oplus KX \oplus KX^2 \oplus ...,$

$R^R = \{paires\} \oplus \{impaires\}$

$\{f'' = f\} = R \cos \oplus R \sin$

$C^0([a,b]) = R \oplus \ker \int_a^b$

$C^0(R,R) = \left\{ f_{|R_*^-} = 0 \right\} \oplus \{cstes\} \oplus \left\{ f_{|R_*^+} = 0 \right\}$

Cas de deux sev, déf des *supplémentaire*, def des projecteurs, symétrie, puis rq sur proj orthogonaux. En profiter pour glisser le TH rg abstrait :

Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$. On a $\operatorname{Ker} u_{|S} = S \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$, donc $u_{|S}$ est injectif. Montrons que $u_{|S}$ atteint tous les vecteurs de $\operatorname{Im} u$. Pour $u(x) \in \operatorname{Im} u$, on décompose $x = k + s$ selon $S \oplus \operatorname{Ker} u$, d'où $u(x) = \underbrace{u(k)}_{=0} + u(s) \in \operatorname{Im} u_{|S}$. Il en résulte que $u_{|S}$ est un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$.

Lorsque les F_i sont des droite Kx_i, les coomposantes s'écraiv $\lambda_i x_i$, et les λ_i sont appelées *coordonnée* (et non composantes) dans la base x_i. Comment reconnatre si une famille de droite est en $\bigoplus$?

1.4 liberté

En particulier dans ci-dessus, lorsque les F_i sont des droite Kx_i, on se demande si

$$\sum \lambda_i x_i = 0 \implies \overrightarrow{\lambda} = \overrightarrow{0},$$

cela amène à la notion de liberté.

vecteur *lié* = vecteur engendré. famille *liée* si il y un vecteur lié aux autres, *libre* sinon (on dit aussi *linéirement indépendants*). Clair que notions symétriques, et intrisèques qui ne dépend pas de l'espace ambiant.

Rq : une relation de liaison ne mettant en jeu qu'un nombre fini de vecteurs, une famille est libre si tout sous-famille finie l'est.

Critère pratique de liberté :

$$(x_i) \iff \forall \overrightarrow{\lambda} \in K^{(I)},\ \left(\sum \lambda_i x_i = 0 \implies \overrightarrow{\lambda} = \overrightarrow{0} \right).$$

On a toujours une condition de liaison évidente ($0 = 0$), l'énoncé ci-dessus signifie que c'est la seule possible pour une famille libre. Démo : évidente du coup.

Ainsi , si $\forall i, x_i \neq 0$,

$$(x_i) \ \textit{libre} \iff \operatorname{Vect}\{x_i\} = \bigoplus K x_i.$$

lemme : si L libre, $L \cup \{a\}$ libre ssi a pas lié à L

cor : (e_i) libre ssi $(e_i)_{i \neq i_0}$ libre et $e_{i_0} \notin \operatorname{Vect} e_{i \neq i_0}$. Cas particulier : $(e_1, ..., e_n)$ libre ssi

$$\begin{array}{rcl} e_1 & \neq & 0 \\ e_2 & \notin & Ke_1 \\ e_3 & \notin & Ke_1 + Ke_2 \\ & & ... \\ e_n & \notin & Ke_1 + ... + Ke_{n-1} \end{array}$$

exemple :

$\emptyset$ est libre

$\{a\}$ est librre ssi $a \neq 0$

$\{a, b\}$ liée ssi a et b colinéaires

$\{a, b, c\}$ libre ssi a, b, c non coplanaires.

toute famille de polynômes échelonnée en degré est libre

toute échelle de compariaon est libre

Plus dur : $\left(e^{\lambda \cdot}\right)_{\lambda \in C}$ libre (vep associée à l'opérature de dérviation) $(|\cdot - a|)_{a \in R}$ libre (préfére la notation famile à support fini, sinon on introduit des doubles indices...)

ATTENTION : si $a_1, .., a_k$;libre et max, $a_{k+1}, .., a_n$ ne sont psa formcent liés. DESSIN : les $a_{>k}$ sont des ballons attachés au sol formé des $a_{\leq k}$. Si on coupe les fils, les ballons ne restent pas forcément attachés !

Critière en terme d'applications :

$$(x_i) \ \textit{libre} \iff \begin{array}{ccc} K^{(I)} & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{\lambda} & \longmapsto & \sum \lambda_i x_i \end{array} \text{ injectif.}$$

(La liberté est préservée par les applcation injectives)

rq sur $\oplus$ externe : on peut toujours créer un + articiel entre deux ev qui donne l'unicité de la décomposition. Formelememn, $\bigoplus E_i$ est le sev de $\prod E_i$ formés des applications à support finis.

Il n'a y pas d'ambiguité : en voyant chaque E_i dans $\bigoplus E_i$, leur somme directe interne vaut bien celle externe.

1.5 caractèré génrateur, bases

Question : que la décompostion soit unique ou non, existe-ell ? Autrement dit, est-ce que tout vecteur $x \in E$ se décompose seloe $\sum K x_i$? i.e. est-ce que tout $x \in E$ est dans $\operatorname{Vect} x_i$? i.e est-ce que tout $x \in E$ est engendré par les x_i ? Si oui, on parle de famille/partie (lapsus ordre pas important) *génératrice* (attention : (x_i) engendre F ssi $F = \operatorname{Vect} x_i$, c'est plus précis que l'inclusion : une partie génératrice doit en effet être une partie !).

Critère en terme d'appliccation :

$$(x_i) \text{ géné} \iff \begin{array}{ccc} K^{(I)} & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{\lambda} & \longmapsto & \sum \lambda_i x_i \end{array} \text{ surjectif.}$$

Rq : une partie est toujours génératrice de son Vect.

Tous les exemples ci-dessus donnent en fait des familles génératrices (et libres) : il y a existence et unicité de la décomposition –> on parle de base.

Ainsi

$$(x_i) \text{ base de } E \iff E = \bigoplus K x_i \iff \begin{array}{ccc} K^{(I)} & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{\lambda} & \longmapsto & \sum \lambda_i x_i \end{array} \text{ bijectf.}$$

La seconde caractérisation permet de parler des *coordonnées* d'un vecteur dans la base x_i.

exmple des *bases canonque* : la donnée d'un vecteur nous donne tout de suite ses coordonée : K^n, $K[X]$, $M_{n,p}(K)$.

Rq : la bc n'est pas forcément optimale, on a le droit d'en changer !

ON peut recoller des bases : c'est le th d'assoc pour des droites

rq : le caractère générateur est conservé par les application surjectives.

base = libre max = géné min
RQ : tout ev admet une base équivaut à AC
cf http ://www.math.lsa.umich.edu/~ablass/bases-AC.pdf

2 Formes linéaires

forme liénaire = appliation scalaire. Intéret -> normaliser des vecteurs : $\frac{a}{\varphi(a)} \mapsto 1$, donc $\frac{a}{\varphi(a)} - \frac{b}{\varphi(b)} \mapsto 0$, soit (pour éviter les pb de zéros) $\varphi(b)\,a - \varphi(a)\,b \mapsto 0$.

Deux exemples fondamentaux : formes coordonnées, evaluation dans K^X. Poly de Lagrange sont bases préduale des évulations en les pôles.

forme linéaire non nulle = noyau d'hyperplans. Les HP recomposent tout le monde en dim finie. interet de $H = \operatorname{Ker}\varphi$? Passers des vecteurs aux scalaires (commee en physique !) –> équation de sev, etc.

Exemple de $E = \operatorname{Ker}\varphi \oplus Ka$ où $\varphi(a) \neq 0$ (démo : $x \mapsto \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a$ est un porj de noyau $\operatorname{Ker}\varphi$ et d'im Ka) : $R^R = \{f; f(a) = 0\} \oplus \{cstes\}$, $R^R = \left\{f; \int f = 0\right\} \oplus \{cstes\}$, matrices magiques=$RJ \oplus \{\text{somme commune=0}\}$

Chevron de dualité : $\langle a, \varphi\rangle$

Un hyperplan est un sev strict maximal (interprétation géométrique ? bof selon gilles, ce sont les droites qui sont importantes, codim, tout ca...

Si $E = A \oplus B$, on a un iso$\left\{\begin{array}{ccc} E^* & \tilde{\longrightarrow} & A^* \oplus B^* \\ \varphi & \longmapsto & \varphi_{|A} + \varphi_{|B} \\ (\alpha \oplus 0) + (0 \oplus \beta) & \longleftarrow & \alpha + \beta \end{array}\right.$, et plus généralement $\left(\bigoplus E_i\right)^* \cong \prod E_i^*$ (attnetion, on perd la somme directe pour une infinité de E_i)

Cas pariculier : POur décrire le dual d'un ev, on prend une base $(e_i)_i$, d'où $E \cong K^{(I)}$. On a alors la correspondance (non canonique) $\left\{\begin{array}{ccc} \left(K^{(I)}\right)^* & \tilde{\longrightarrow} & K^I \\ f & \longmapsto & (f(e_i)) \\ \overrightarrow{x} \mapsto \sum_{i\in I} \lambda_i e_i & \longleftarrow & \overrightarrow{\lambda} \end{array}\right.$.

EXO : *mq il n'y a pas d'iso "canonique" entre un ev et son dual, au sens où, si $i : E \simeq E^*$ est un tel iso, alors $\langle i(a), b\rangle$ est inchangé en remplaçant les vecteurs a et b par leurs images par n'mporte quel automorphisme de E. (exception : $\dim E = 0, 1$ ou $\dim E = 2 = |K|$)*

DEM : SUPP $K \neq \mathbb{F}_2$, soit ω auto dilation de rapport $\lambda \neq 0, 1$ Alors $\langle j(a), b\rangle = \langle j(\omega a), \omega b\rangle = \langle j(\lambda a), b\rangle = \lambda \langle j(a), b\rangle$, donc $\langle j(a), b\rangle$ ets nul pour b non lié à a, donc $j(a)$ est nul sur E privé de Ka, donc sur E (car dim> 1), absrude par injective de j.

SUPPdim $E > 2$. Soit B base, $b \in B$, la forme linéaire coordonée b^* est atteinte par un $i(a)$

SUPP a no nlié à b. On prend un $b' \in B$ libre avec a et b, puis on prend un iso qui fixe a et échange b et b'. Alors

$$1 = \langle b^*, b\rangle = \langle i(a), b\rangle = \langle i(\omega a), \omega b\rangle = \langle i(a), b'\rangle = \langle b^*, b'\rangle = 0, \text{ absurde.}$$

Donc $\forall B$ base, $\forall b \in B$, $i^{-1}(b^*) = ?b$ (personne nul car i iso), ie $i(b) = \lambda_b b^*$. Soit a, b libres. Aors $a - b$ et b libres, ce qui donne deux bases, dans lequel $b^*(a)$ vaut 0 ou 1, contradiction.

On est donc ramené à $\dim E = 2$. Fixant une base, on veut ${}^tXIY = {}^t(UX)\,IUY$ $\forall X, Y, U$ ie ${}^tU^{-1}I = IU$ $\forall I \in GL_2(\mathbb{F}_2)$. Or, $GL_2(\mathbb{F}_2)$ contient l'identié, une transpostion, deux transvecition (tranposées) et deux transvections symétriques (ces quatre goupes étant stables par $U \mapsto {}^tU^{-1}$) On vérifie que I =tranposition fonctionne (en vérfiant que échanger ligne de U revient à échanger colonne de ${}^tU^{-1}$).

3 Application multilinéaire

jsute les défintion.
EG : formes multiléianre : le produit. Voir le det pour plus de choses.
PROP : $L(E, L(F,G)) \cong \mathrm{Bil}(E \times F, G) \cong L(L(E,F), G)$
(en termes catégoriels, c'est l'analogue de $\left(G^F\right)^E \cong G^{F\times E} \cong G^{E\times F} \cong G^{F^E}$)

EXO : *deux formes multinlinare de même "noyau" sont colinéaires.*
Supposons $f(a,b) = 0 => g(a,b) = 0$. Alors $\mathrm{Ker}\, f(a,\cdot) \subset \mathrm{Ker}\, g(a,\cdot)$, donc $g(a,\cdot) =?f(a,\cdot) = \frac{g(a,b)}{f(a,b)} f(a,\cdot)$ en choisiant $f(a,b) \neq 0$ (sinon $f = 0$ et $g = 0$,r ien à faire). Alors $\forall \beta \notin \mathrm{Ker}\, f(a,\cdot)$, on a

$$g(\cdot,\beta) =?f(\cdot,\beta) = \frac{g(a,\beta)}{f(a,\beta)} f(\cdot,\beta) = \frac{g(a,\beta)}{f(a,\beta)} f(\cdot,\beta) = \frac{g(a,b)}{f(a,b)} f(\cdot,\beta)\ ;$$

or ${}^c\,\mathrm{Ker}\, f(a,\cdot)$ engendre tout l'espace, donc l'égalité est valable pour tout β, *CQFD.*

4 Algèbres

« Algèbre » vient d'un mot arabe (al jabr) qui désigne l'opération de réduction (comme, réduction d'une fracture), une des opérations principales sur les équations que al Khowarizmi a définies (vers 825).

$K, K^X, A^X, K[X], L(E)$.
sousalg : partie qui est une algèbre. Intérêt : pour montrer qu'un truc est stable par CL et produit, on montre que c'est une sous-algèbre d'un truc connu.
Criète : sous-anneau et sev : contient 1, stable par dilation, somme, produit : $\begin{matrix} 1 \in A \\ \lambda a + bc \in A \end{matrix}$
exemple : $R \hookrightarrow C$, polynome pairs $\hookrightarrow K[X]$, $K \hookrightarrow K[X]$, $\{f$ cv en a fixé$\}$ ou $\{f$ admet $DL_n\}$ ou $\{f$ bornés$\}$ $\hookrightarrow R^R$.

PLus général : une algèbres est un ev muni d'une lci bilinéaire (appelé *produit*) (il n'y a alors pas d'ambiguité sur λab). Cela ne suppose ni la commutativtéi, cequi permet de faire joujou avec les quaternions, ni l'associativité, d'o joujou avec les octonions.
(pour les octonions, l'algèbres est *alternative* ? ? ? car le signe $(ab)c - a(bc)$ ets alterné par échange de a, b, c)

EXO construction rigolote pour algébriser un ev V : soit $a \neq 0$ et $S \oplus Ka = V$. On définit

$$(s + \lambda a)(t + \mu a) := \lambda t + \mu s + \lambda \mu a,$$

ceci donne une algèbre comm et assos. Mais pas très canonique car la structure d'alg n'est pas conservée par les applications linéaires −> autre manières fonctorielles ?

Soit M un monoïde et A un anneau. Alors $A^{(M)}$ est un A-module de base M. On définit une lci bilinéaire sur la base M par $x \cdot y = xy$, ce qui permet de sommer les éléments d'un mono multiplicatif.
Soit M un module et A un anneau. Pour mutiplier des veceurs, on va parler de produit tensoriel.

RQ : la seule façon d'injecter un corps K dans une K-algèbre est $\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda \cdot 1) = \lambda \varphi(1) = \lambda \cdot 1$.

GEN des AL si corps de base pas pareil : si $\rho : K \hookrightarrow L$ morphisme de corps et E K-ev F L-ev, dire que $f : E \longrightarrow F$ est ρ-linéaire si $f(\lambda a + b) = \rho(\lambda) f(a) + f(b)$.

Caractère universel des algèbres d'endomorphisme : si A est une algèbre unitaire, alors $\left\{ \begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & L(A) \\ a & \longmapsto & a\cdot \end{array} \right.$.
(parallèle avec théorème de Cayley sur le caractère universel des groupes symétriques)

5 sea et équations affines

6 Complexification d'un ev réel

On peut avoir besoin pour des raisons de complétude algébrique de considérer un ev réel sur le corps des complexes.

La construction naturelle qu'est le produit tensoriel et qui fonctionne pour n'importe quelle extension de corps sera vue bien plus tard. Nous bricolons ici le cas particulier $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$.

Soit E un ev réel et ${}^{\mathbb{C}}E$ ce que l'on souahite être son complexifié. Quel sens donner à $2a-5ib$ pour $a, b \in E$? Comme on peut construire C comme R^2 bien bricolé, on peut poser ${}^{C}E := E^2$ (en pensant un couple (a, b) comme $a+ib$) muni du $+$ usuel (comme R^2) et d'un loi externe qui doit satisfaire notre volonté, à savoir

$$(\lambda + i\mu)(a+ib) = (\lambda a - \mu b) + i(\mu a + \lambda b).$$

On plonge alors E dans ${}^{C}E$ via $a \mapsto (a, 0)$.

Autre idée : $E \simeq L(K, E)$. On peut donc essayer de poser ${}^{C}E = L_R(C, E)$

Qui fonctionne pour toute extension ! Si (α_i) est une k-base de K, alors $L_k(K, E) = L_k(\bigoplus k, E) = \bigoplus L_k(k, E) = \bigoplus E$, donc les éléments de ${}^{L}E$ s'écrivent via l'iso précédent comme $\sum \alpha_i e_i$ pour $e_i \in E$.