Journée régionale de l'APMEP Lorraine

Représentation proportionnelle

par Rémi Peyre (Univ. Lorraine)
remi.peyre@univ-lorraine.fr

19 mars 2025

La délégation

Imaginons que la métropole du Grand Nancy organise une rencontre entre lycéen(ne)s de seconde générale et mathématicien(ne)s. La logistique permet d'accueillir 40 lycéens. La Métropole décide de dispatcher les places disponibles entre les différents lycées publics, au nombre de 8. Par souci de justice, on souhaite que le nombre d'invitations soit proportionnel au nombre d'élèves de 2$^{\text{de}}$ générale par lycée.

La délégation

Imaginons que la métropole du Grand Nancy organise une rencontre entre lycéen(ne)s de seconde générale et mathématicien(ne)s. La logistique permet d'accueillir 40 lycéens. La Métropole décide de dispatcher les places disponibles entre les différents lycées publics, au nombre de 8. Par souci de justice, on souhaite que le nombre d'invitations soit proportionnel au nombre d'élèves de 2de générale par lycée.

L'effectif total est de 1 290 lycéens, répartis ainsi :

A. Lycée Anatole : 229
B. Lycée Berthe : 364
C. Lycée Célestin : 54
D. Lycée Désiré : 171
E. Lycée Eugène : 114
F. Lycée François : 97
G. Lycée Gaston : 223
H. Lycée Henri : 38

La délégation

Imaginons que la métropole du Grand Nancy organise une rencontre entre lycéen(ne)s de seconde générale et mathématicien(ne)s. La logistique permet d'accueillir 40 lycéens. La Métropole décide de dispatcher les places disponibles entre les différents lycées publics, au nombre de 8. Par souci de justice, on souhaite que le nombre d'invitations soit proportionnel au nombre d'élèves de 2de générale par lycée.

L'effectif total est de 1 290 lycéens, répartis ainsi :

A. Lycée Anatole : 229 $(40\,/\,1290 \times 229 = 7{,}10)$
B. Lycée Berthe : 364 $(40\,/\,1290 \times 364 = 11{,}29)$
C. Lycée Célestin : 54 $(40\,/\,1290 \times 54 = 1{,}67)$
D. Lycée Désiré : 171 $(40\,/\,1290 \times 171 = 5{,}30)$
E. Lycée Eugène : 114 $(40\,/\,1290 \times 114 = 3{,}53)$
F. Lycée François : 97 $(40\,/\,1290 \times 97 = 3{,}01)$
G. Lycée Gaston : 223 $(40\,/\,1290 \times 223 = 6{,}91)$
H. Lycée Henri : 38 $(40\,/\,1290 \times 38 = 1{,}18)$

La délégation

Imaginons que la métropole du Grand Nancy organise une rencontre entre lycéen(ne)s de seconde générale et mathématicien(ne)s. La logistique permet d'accueillir 40 lycéens. La Métropole décide de dispatcher les places disponibles entre les différents lycées publics, au nombre de 8. Par souci de justice, on souhaite que le nombre d'invitations soit proportionnel au nombre d'élèves de 2de générale par lycée.

L'effectif total est de 1 290 lycéens, répartis ainsi :

A. Lycée Anatole : 229 $(40 / 1290 \times 229 = 7{,}10)$
B. Lycée Berthe : 364 $(40 / 1290 \times 364 = 11{,}29)$
C. Lycée Célestin : 54 $(40 / 1290 \times 54 = 1{,}67)$
D. Lycée Désiré : 171 $(40 / 1290 \times 171 = 5{,}30)$
E. Lycée Eugène : 114 $(40 / 1290 \times 114 = 3{,}53)$
F. Lycée François : 97 $(40 / 1290 \times 97 = 3{,}01)$
G. Lycée Gaston : 223 $(40 / 1290 \times 223 = 6{,}91)$
H. Lycée Henri : 38 $(40 / 1290 \times 38 = 1{,}18)$

Comment allouer les invitations, sachant qu'on ne peut pas découper les lycéens en morceaux ?

Position générale du problème

- $K \in \mathbb{N}^*$: Nombre de partis à représenter.
  Identité d'un parti : $k \in \{0, \dots, K-1\}$.

Position générale du problème

- $K \in \mathbb{N}^*$: Nombre de partis à représenter.
  Identité d'un parti : $k \in \{0, \ldots, K-1\}$.
- $p_k \in [0, 1]$: Proportion représentée par le parti n° k.
  On a $\sum_{k=0}^{K-1} p_k = 1$.

Position générale du problème

- $K \in \mathbb{N}^*$: Nombre de partis à représenter.
  Identité d'un parti : $k \in \{0, \dots, K-1\}$.
- $p_k \in [0, 1]$: Proportion représentée par le parti n° k.
  On a $\sum_{k=0}^{K-1} p_k = 1$.
- $N \in \mathbb{N}^*$: Nombre de sièges à pourvoir.

Position générale du problème

- $K \in \mathbb{N}^*$: Nombre de partis à représenter.
  Identité d'un parti : $k \in \{0, \ldots, K-1\}$.
- $p_k \in [0, 1]$: Proportion représentée par le parti n° k.
  On a $\sum_{k=0}^{K-1} p_k = 1$.
- $N \in \mathbb{N}^*$: Nombre de sièges à pourvoir.
- $n_k \in \mathbb{N}$: Nombre de sièges alloués au parti n° k.

Position générale du problème

- $K \in \mathbb{N}^*$: Nombre de partis à représenter.
  Identité d'un parti : $k \in \{0, \dots, K-1\}$.
- $p_k \in [0, 1]$: Proportion représentée par le parti n° k.
  On a $\sum_{k=0}^{K-1} p_k = 1$.
- $N \in \mathbb{N}^*$: Nombre de sièges à pourvoir.
- $n_k \in \mathbb{N}$: Nombre de sièges alloués au parti n° k.

Objectif : Choisir les n_k avec $\sum_{k=0}^{K-1} n_k = N$ de sorte que "dans l'ensemble, chaque n_k / N soit aussi proche que possible du p_k correspondant".

Position générale du problème

- $K \in \mathbb{N}^*$: Nombre de partis à représenter.
  Identité d'un parti : $k \in \{0, \ldots, K-1\}$.
- $p_k \in [0,1]$: Proportion représentée par le parti n° k.
  On a $\sum_{k=0}^{K-1} p_k = 1$.
- $N \in \mathbb{N}^*$: Nombre de sièges à pourvoir.
- $n_k \in \mathbb{N}$: Nombre de sièges alloués au parti n° k.

Objectif : Choisir les n_k avec $\sum_{k=0}^{K-1} n_k = N$ de sorte que "dans l'ensemble, chaque n_k / N soit aussi proche que possible du p_k correspondant".

Notation

K étant supposé connu, on notera

$$\mathscr{A}_N := \left\{ (n_k)_{k \in [\![0,K[\![} \in \mathbb{N}^K \;\middle|\; \sum_{k=0}^{K-1} n_k = N \right\}$$

l'ensemble des allocations possibles de N sièges.

C'est trivial, non ?...

La méthode d'allocation au plus fort reste reponse sur l'algorithme suivant :

1. Définir les nombres de sièges théoriques par $n_k^{\mathrm{th}} \coloneqq p_k N$.
2. Pour chaque parti, commencer par allouer la partie entière de n_k^{th}, qu'on appellera « nombre de sièges pleins » : $n_k^{\mathrm{pl}} \coloneqq \lfloor n_k^{\mathrm{th}} \rfloor$.
3. Le « reste » pour chaque parti est alors défini par $r_k \coloneqq n_k^{\mathrm{th}} - n_k^{\mathrm{pl}} \in [0, 1[$: c'est la "part de siège" à laquelle il devrait encore avoir droit.
4. On ordonne les partis par valeur décroissante de restes : $\{k_0, \dots, k_{K-1}\} = \{0, \dots, K-1\}$ avec $r_{k_0} \geqslant r_{k_1} \geqslant \dots \geqslant r_{k_{K-1}}$ ※.
5. Le résidu à allouer R est la valeur totale des restes : $R \coloneqq \sum_{k=0}^{K-1} r_k = N - \sum_{k=0}^{K-1} n_k^{\mathrm{pl}} \in [\![0, K-1]\!]$.
6. On alloue un siège supplémentaire à chacun des R partis ayant les plus forts restes : Pour $i < R$, on prend $n_k^{\mathrm{pfr}} \coloneqq n_k^{\mathrm{pl}} + 1$, et pour $i \geqslant R$, on prend $n_k^{\mathrm{pfr}} \coloneqq n_k^{\mathrm{pl}}$.

※. Génériquement, les inégalités sont strictes et cela définit univoquement les k_i.

Exemple d'allocation au plus fort reste

Reprenons l'exemple des lycées, avec $K = 8$ et $N = 40$:

k	p_k	n_k^{th}	n_k^{pl}	r_k	$k = k_?$	n_k^{pfr}
A	17,8 %					
B	28,2 %					
C	4,2 %					
D	13,3 %					
E	8,8 %					
F	7,5 %					
G	17,3 %					
H	2,9 %					
Tot.	100,0 %					

Exemple d'allocation au plus fort reste

Reprenons l'exemple des lycées, avec $K = 8$ et $N = 40$:

k	p_k	n_k^{th}	n_k^{pl}	r_k	$k = k_?$	n_k^{pfr}
A	17,8 %	7,10				
B	28,2 %	11,29				
C	4,2 %	1,67				
D	13,3 %	5,30				
E	8,8 %	3,53				
F	7,5 %	3,01				
G	17,3 %	6,91				
H	2,9 %	1,18				
Tot.	100,0 %	40				

Exemple d'allocation au plus fort reste

Reprenons l'exemple des lycées, avec $K = 8$ et $N = 40$:

k	p_k	n_k^{th}	n_k^{pl}	r_k	$k = k_?$	n_k^{pfr}
A	17,8 %	7,10	7	0,10		
B	28,2 %	11,29	11	0,29		
C	4,2 %	1,67	1	0,67		
D	13,3 %	5,30	5	0,30		
E	8,8 %	3,53	3	0,53		
F	7,5 %	3,01	3	0,01		
G	17,3 %	6,91	6	0,91		
H	2,9 %	1,18	1	0,18		
Tot.	100,0 %	40	37	3		

Exemple d'allocation au plus fort reste

Reprenons l'exemple des lycées, avec $K = 8$ et $N = 40$:

k	p_k	n_k^{th}	n_k^{pl}	r_k	$k = k_?$	n_k^{pfr}
A	17,8 %	7,10	7	0,10	6	
B	28,2 %	11,29	11	0,29	4	
C	4,2 %	1,67	1	0,67	1	
D	13,3 %	5,30	5	0,30	3	
E	8,8 %	3,53	3	0,53	2	
F	7,5 %	3,01	3	0,01	7	
G	17,3 %	6,91	6	0,91	0	
H	2,9 %	1,18	1	0,18	5	
Tot.	100,0 %	40	37	3	*s/o*	

Exemple d'allocation au plus fort reste

Reprenons l'exemple des lycées, avec $K = 8$ et $N = 40$:

k	p_k	n_k^{th}	n_k^{pl}	r_k	$k = k_?$	n_k^{pfr}
A	17,8 %	7,10	7	0,10	6	**7**
B	28,2 %	11,29	11	0,29	4	**11**
C	4,2 %	1,67	1	0,67	1	**2**
D	13,3 %	5,30	5	0,30	3	**5**
E	8,8 %	3,53	3	0,53	2	**4**
F	7,5 %	3,01	3	0,01	7	**3**
G	17,3 %	6,91	6	0,91	0	**7**
H	2,9 %	1,18	1	0,18	5	**1**
Tot.	100,0 %	40	37	3	*s/o*	40

Un théorème...

Définition

Soit $\ell : [-1, 1] \to \mathbb{R}_+$ une fonction vérifiant $f(0) = 0$. Pour un K-uplet de proportions $(p_k)_{k\in[\![0,K[\![}$, un nombre de sièges $N \in \mathbb{N}^*$, et une allocation proposée $\vec{n} \coloneqq (n_k)_{k\in[\![0,K[\![}$, définissons la *$\ell$-perte de qualité* associée à cette allocation comme

$$L^{(\ell)}(\vec{n}) \coloneqq \sum_{k=0}^{K-1} \ell\left(\frac{n_k}{N} - p_k\right).$$

Un théorème...

Définition

Soit $\ell : [-1,1] \to \mathbb{R}_+$ une fonction vérifiant $f(0) = 0$. Pour un K-uplet de proportions $(p_k)_{k\in[\![0,K[\![}$, un nombre de sièges $N \in \mathbb{N}^*$, et une allocation proposée $\vec{n} \coloneqq (n_k)_{k\in[\![0,K[\![}$, définissons la *$\ell$-perte de qualité* associée à cette allocation comme

$$L^{(\ell)}(\vec{n}) \coloneqq \sum_{k=0}^{K-1} \ell\left(\frac{n_k}{N} - p_k\right).$$

Théorème

Si ℓ est convexe, alors l'allocation au plus fort reste minimise la ℓ-perte de qualité :

$$\forall \vec{n} \in \mathscr{A}_N \quad L^{(\ell)}(\vec{n}) \geqslant L^{(\ell)}(\vec{n}^{\mathrm{pfr}}).$$

Un théorème...

Théorème

Si ℓ est convexe, alors l'allocation au plus fort reste minimise la ℓ-perte de qualité :

$$\forall \vec{n} \in \mathscr{A}_N \quad L^{(\ell)}(\vec{n}) \geqslant L^{(\ell)}(\vec{n}^{\mathrm{pfr}}).$$

Example

1. En prenant $\ell(\delta) = |\delta|$, on en déduit que l'allocation au plus fort reste minimise l'erreur absolue totale entre proportions réelles et proportions allouées.
2. En prenant $\ell(\delta) = \delta^2$, on en déduit que l'allocation PFR minimise la distance (euclidienne), dans $\mathbb{R}^K$, entre le K-uplet des proportions réelles et le K-uplet des proportions allouées. (Cette distance n'étant autre que la racine carrée de $L^{(2)}(\vec{n})$).
3. Nous allons également montrer que l'allocation PFR minimise l'erreur absolue maximale entre proportions réelles et proportions alloués, définie par

$$L^{\infty}(\vec{n}) \coloneqq \max\left\{ |n_k \,/\, N - p_k| \;\middle|\; k \in [\![0, K[\![\right\}.$$

Corolaire : Erreur absolue maximale

Corolaire

L'allocation PFR minimise l'erreur absolue maximale.

Démonstration.

Pour q un entier pair non nul, notons $L^{(q)}$ la perte associée à la fonction « puissance q » (qui est convexe). On observe que

$$L^{(\infty)}(\vec{n})^q \leqslant L^{(q)}(\vec{n}) \leqslant K L^{(\infty)}(\vec{n})^q.$$

Supposons maintenant $\vec{n}'$ une allocation concurrente à celle au PFR. De par les inégalités qui précèdent, on a alors d'une part que $L^{(q)}(\vec{n}') \leqslant K L^{(\infty)}(\vec{n}')^q$, d'autre part que $L^{(q)}(\vec{n}^{\mathrm{pfr}}) \geqslant L^{(\infty)}(\vec{n}^{\mathrm{pfr}})^q$, d'où

$$\frac{L^{(q)}(\vec{n}')}{L^{(q)}(\vec{n}^{\mathrm{pfr}})} \leqslant K\left(\frac{L^{(\infty)}(\vec{n}')}{L^{(\infty)}(\vec{n}^{\mathrm{pfr}})}\right)^q.$$

Or, si on avait $L^{(\infty)}(\vec{n}') < L^{(\infty)}(\vec{n}^{\mathrm{pfr}})$, le quotient dans la parenthèse serait strictement inférieur à 1, de sorte que, lorsqu'on ferait tendre q vers l'infini, le membre de droite tendrait vers 0 : mais alors, pour q assez grand, on aurait $L^{(q)}(\vec{n}') < L^{(q)}(\vec{n}^{\mathrm{pfr}})$, ce que notre théorème interdit ! $\square$

Preuve de l'optimalité de l'allocation PFR

Considérons une allocation $\vec{n}' \in \mathscr{A}_N$ quelconque. Par rapport à l'allocation $\vec{n}^{\mathrm{pfr}}$, sous l'allocation $\vec{n}'$, certains partis ont gagné des sièges, tandis que d'autres en ont perdu. Soit $\varDelta$ le nombre total de sièges gagnés, qui est aussi égal au nombre total de sièges perdus puisque le total de sièges alloués reste le même. On peut alors passer de $\vec{n}^{\mathrm{pfr}}$ à $\vec{n}'$ en $\varDelta$ étapes :

$$\vec{n}^{\mathrm{pfr}} \coloneqq \vec{n}^{(0)} \to \vec{n}^{(1)} \to \cdots \to \vec{n}^{(\varDelta)} \eqqcolon \vec{n}',$$

de façon qu'à chaque étape, un parti exactement gagne un siège au détriment d'un autre, et qu'au cours de la procédure, soit un parti ne fait que gagner des sièges, soit il ne fait qu'en perdre.

Preuve de l'optimalité de l'allocation PFR

$$\vec{n}^{\mathrm{pfr}} := \vec{n}^{(0)} \to \vec{n}^{(1)} \to \cdots \to \vec{n}^{(\Delta)} =: \vec{n}',$$

Preuve de l'optimalité de l'allocation PFR

$$\vec{n}^{\mathrm{pfr}} := \vec{n}^{(0)} \to \vec{n}^{(1)} \to \cdots \to \vec{n}^{(\Delta)} =: \vec{n}',$$

Une allocation $\vec{n}$ étant proposée, appelons erreur d'allocation *du parti k, notée ε_k, la différence $n_k - p_k N$ entre le nombre de sièges alloués et le nombre théorique.*

Considérons le passage de l'étape i à l'étape $(i+1)$ dans la chaine ci-dessus. Soit k_+ le parti qui gagne un siège, et k_- celui qui en perd un, de sorte que $\varepsilon_{k_+}^{(i+1)} = \varepsilon_{k_+}^{(i)} + 1$, resp. $\varepsilon_{k_-}^{(i+1)} = \varepsilon_{k_-}^{(i)} - 1$. Quand on compare les pertes de qualité pour les allocations $\vec{n}^{(i)}$ et $\vec{n}^{(i+1)}$, on voit que le changement est uniquement dû aux partis k_+ et k_- :

$$L^{(\ell)}(\vec{n}^{(i+1)}) - L^{(\ell)}(\vec{n}^{(i)}) =$$
$$\ell\big((\varepsilon_{k_+}^{(i)} + 1)\,/\,N\big) - \ell(\varepsilon_{k_+}^{(i)}\,/\,N) + \ell\big((\varepsilon_{k_-}^{(i)} - 1)\,/\,N\big) - \ell(\varepsilon_{k_-}^{(i)}\,/\,N).$$

Preuve de l'optimalité de l'allocation PFR

$$\vec{n}^{\mathrm{pfr}} := \vec{n}^{(0)} \to \vec{n}^{(1)} \to \cdots \to \vec{n}^{(\Delta)} =: \vec{n}',$$

> *Une allocation $\vec{n}$ étant proposée, appelons* erreur d'allocation *du parti k, notée ε_k, la différence $n_k - p_k N$ entre le nombre de sièges alloués et le nombre théorique.*

Considérons le passage de l'étape i à l'étape $(i+1)$ dans la chaine ci-dessus. Soit k_+ le parti qui gagne un siège, et k_- celui qui en perd un, de sorte que $\varepsilon_{k_+}^{(i+1)} = \varepsilon_{k_+}^{(i)} + 1$, resp. $\varepsilon_{k_-}^{(i+1)} = \varepsilon_{k_-}^{(i)} - 1$. Quand on compare les pertes de qualité pour les allocations $\vec{n}^{(i)}$ et $\vec{n}^{(i+1)}$, on voit que le changement est uniquement dû aux partis k_+ et k_- :

$$L^{(\ell)}(\vec{n}^{(i+1)}) - L^{(\ell)}(\vec{n}^{(i)}) = \\ \ell\Big((\varepsilon_{k_+}^{(i)} + 1) / N\Big) - \ell(\varepsilon_{k_+}^{(i)} / N) + \ell\Big((\varepsilon_{k_-}^{(i)} - 1) / N\Big) - \ell(\varepsilon_{k_-}^{(i)} / N).$$

L'évolution de $L^{(\ell)}$ est ainsi de la forme $f(c) - f(a) + f(d) - f(b)$, avec $a + d = b + c$. Or, f étant supposée convexe, une telle différence sera positive dès lors que $c \geqslant b$: notre dernière étape consistera dès lors à prouver que $\varepsilon_{k_+}^{(i)} + 1 \geqslant \varepsilon_{k_-}^{(i)}$.

Preuve de l'optimalité de l'allocation PFR

$$\vec{n}^{\mathrm{pfr}} := \vec{n}^{(0)} \to \vec{n}^{(1)} \to \cdots \to \vec{n}^{(\Delta)} =: \vec{n}',$$

Une allocation $\vec{n}$ étant proposée, appelons erreur d'allocation *du parti k, notée ε_k, la différence $n_k - p_k N$ entre le nombre de sièges alloués et le nombre théorique.*

Montrons donc que $\varepsilon_{k_+}^{(i)} + 1 \geqslant \varepsilon_{k_-}^{(i)}$.

Preuve de l'optimalité de l'allocation PFR

$$\vec{n}^{\mathrm{pfr}} := \vec{n}^{(0)} \to \vec{n}^{(1)} \to \cdots \to \vec{n}^{(\Delta)} =: \vec{n}',$$

Une allocation $\vec{n}$ étant proposée, appelons erreur d'allocation *du parti k, notée ε_k, la différence $n_k - p_k N$ entre le nombre de sièges alloués et le nombre théorique.*

Montrons donc que $\varepsilon_{k_+}^{(i)} + 1 \geqslant \varepsilon_{k_-}^{(i)}$.

Le parti k_+ n'ayant pu que gagner des sièges jusqu'à l'étape i, on a $\varepsilon_{k_+}^{(i)} \geqslant \varepsilon_{k_+}^{(0)} \underset{\text{déf}}{=} \varepsilon_{k_+}^{\mathrm{pfr}}$; et de même, $\varepsilon_{k_-}^{(i)} \leqslant \varepsilon_{k_-}^{\mathrm{pfr}}$. Or, au cours de l'allocation au PFR, si nous notons $r_\star$ est le plus petit reste parmi les partis recevant un siège supplémentaire lors de la dernière étape, l'erreur d'allocation pour chacun de ces partis "supplémentés" était $1 - r_k \leqslant 1 - r_\star$, tandis que l'erreur d'allocation pour chacun des autres partis est $-r_k \geqslant -r_\star$: par conséquent, pour tout parti, le PFR fait en sorte que $\varepsilon_k^{\mathrm{pfr}} \in [-r_\star, 1 - r_\star]$. Appliquant les bornes de gauche et de droite de cet encadrement à resp. k_+ et k_-, on en déduit alors que $\varepsilon_{k_+}^{(i)} + 1 \geqslant \varepsilon_{k_-}^{(i)}$: c'est la dernière étape qui nous manquait !

Le paradoxe de l'Alabama

Prenons $K = 3$ et $(p_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{B}}, p_{\mathrm{C}}) = (44\ \%, 42\ \%, 14\ \%)$.

Pour $N = 3$, l'allocation au plus fort reste donne $n_{\mathrm{A}} = 1, n_{\mathrm{B}} = 1, n_{\mathrm{C}} = 1$.

Le paradoxe de l'Alabama

Prenons $K = 3$ et $(p_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{B}}, p_{\mathrm{C}}) = (44\ \%, 42\ \%, 14\ \%)$.

Pour $N = 3$, l'allocation au plus fort reste donne $n_{\mathrm{A}} = 1, n_{\mathrm{B}} = 1, n_{\mathrm{C}} = 1$.

Supposons maintenant qu'il y ait un siège supplémentaire à allouer, autrement dit, $N = 4$...

Le paradoxe de l'Alabama

Prenons $K = 3$ et $(p_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{B}}, p_{\mathrm{C}}) = (44~\%, 42~\%, 14~\%)$.

Pour $N = 3$, l'allocation au plus fort reste donne $n_{\mathrm{A}} = 1, n_{\mathrm{B}} = 1, n_{\mathrm{C}} = 1$.

Supposons maintenant qu'il y ait un siège supplémentaire à allouer, autrement dit, $N = 4$...

L'allocation devient alors $n_{\mathrm{A}} = 2, n_{\mathrm{B}} = 2, n_{\mathrm{C}} = 0$!

Paradoxe de l'Alabama

À proportions $\vec{p}$ fixées, le nombre de sièges alloué à un parti par la méthode au PFR n'est pas, en général, une fonction croissante de N !

Méthode de Sainte-Laguë

« Le paradoxe de l'Alabama provient de ce que la transformation d'un reste en siège ne dépend pas seulement de la *valeur* du reste considéré, mais aussi de celle des *autres* restes... Si on arrondissait simplement le nombre de sièges théoriques à l'entier le plus proche, on n'aurait pas ce paradoxe !

Méthode de Sainte-Laguë

« Le paradoxe de l'Alabama provient de ce que la transformation d'un reste en siège ne dépend pas seulement de la *valeur* du reste considéré, mais aussi de celle des *autres* restes... Si on arrondissait simplement le nombre de sièges théoriques à l'entier le plus proche, on n'aurait pas ce paradoxe !
— Oui ; mais dans ce cas, rien ne garantit que le total des sièges alloués sera bien celui désiré...

Méthode de Sainte-Laguë

« Le paradoxe de l'Alabama provient de ce que la transformation d'un reste en siège ne dépend pas seulement de la *valeur* du reste considéré, mais aussi de celle des *autres* restes... Si on arrondissait simplement le nombre de sièges théoriques à l'entier le plus proche, on n'aurait pas ce paradoxe !
— Oui ; mais dans ce cas, rien ne garantit que le total des sièges alloués sera bien celui désiré...
— Certes ; mais on peut peut-être refaire les calculs en remplaçant N par une *autre* valeur $\tilde{N}$ (pas forcément entière), choisie de sorte que le total des sièges alloués vaille bien N ! »

Méthode de Sainte-Laguë

« Le paradoxe de l'Alabama provient de ce que la transformation d'un reste en siège ne dépend pas seulement de la *valeur* du reste considéré, mais aussi de celle des *autres* restes... Si on arrondissait simplement le nombre de sièges théoriques à l'entier le plus proche, on n'aurait pas ce paradoxe !

— Oui ; mais dans ce cas, rien ne garantit que le total des sièges alloués sera bien celui désiré...

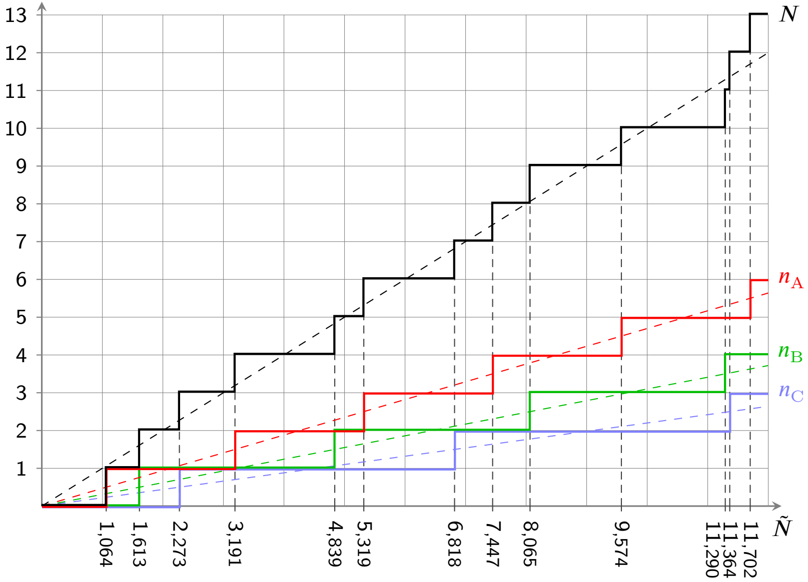
— Certes ; mais on peut peut-être refaire les calculs en remplaçant N par une *autre* valeur $\tilde{N}$ (pas forcément entière), choisie de sorte que le total des sièges alloués vaille bien N ! »

$\rightsquigarrow$ C'est ce qu'on appelle la méthode de Sainte-Laguë.

Explication graphique de la méthode de Sainte-Laguë

On se place dans un cadre générique, ce qui nous permettra d'éviter de traiter les cas d'égalité.
Prenons ici $K = 3$ et $(p_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{B}}, p_{\mathrm{C}}) = (47~\%, 31~\%, 22~\%)$.

Explication graphique de la méthode de Sainte-Laguë



Algorithme de Sainte-Laguë

Si, plutôt qu'un affichage graphique, on fait juste les calculs indispensables au tracé des courbes, on obtient un algorithme facilement implémentable, que je décris ci-dessous.

Algorithme de Sainte-Laguë

Si, plutôt qu'un affichage graphique, on fait juste les calculs indispensables au tracé des courbes, on obtient un algorithme facilement implémentable, que je décris ci-dessous.

Dans cet algorithme, on ajoute les sièges un par un, jusqu'à atteindre le total à pourvoir.

Pour chaque parti k, on va maintenir à jour le nombre de sièges alloués (au stade considéré), noté n_k, initialisé à 0, et le « quotient », noté q_k, initalisé à $2p_k$.

Algorithme de Sainte-Laguë

Si, plutôt qu'un affichage graphique, on fait juste les calculs indispensables au tracé des courbes, on obtient un algorithme facilement implémentable, que je décris ci-dessous.

Dans cet algorithme, on ajoute les sièges un par un, jusqu'à atteindre le total à pourvoir.

Pour chaque parti k, on va maintenir à jour le nombre de sièges alloués (au stade considéré), noté n_k, initialisé à 0, et le « quotient », noté q_k, initalisé à $2p_k$.

À chaque étape :

1. On recherche le parti $k_\star$ dont le quotient est maximal ;
2. On alloue un siège à ce parti : $n_{k_\star} \leftarrow n_{k_\star} + 1$,
3. On replace le quotient $q_{k_\star}$ par $p_{k_\star} / (n_{k_\star} + 1/2)$ (en utilisant la *nouvelle* valeur de $n_{k_\star}$).

Paradoxe de la scission

Prenons $N = 3$. Supposons $K = 2$, avec $p_{\mathrm{A}} = 52$ % et $p_{\mathrm{B}} = 48$ %. L'allocation de Sainte-Laguë (de même que celle au PFR) donne alors, comme de bien entendu, $n_{\mathrm{A}} = 2$ et $n_{\mathrm{B}} = 1$.

Paradoxe de la scission

Prenons $N = 3$. Supposons $K = 2$, avec $p_{\mathrm{A}} = 52~\%$ et $p_{\mathrm{B}} = 48~\%$. L'allocation de Sainte-Laguë (de même que celle au PFR) donne alors, comme de bien entendu, $n_{\mathrm{A}} = 2$ et $n_{\mathrm{B}} = 1$.

Mais le stratège du parti B a une idée. « Divisons-nous, propose-t-il, en deux sous-partis B' et B'', de sorte que $p_{\mathrm{B}'} = 25~\%$ et $p_{\mathrm{B}''} = 23~\%$ » : on a alors $K = 3$ et $(p_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{B}'}, p_{\mathrm{B}''}) = (52~\%, 25~\%, 23~\%)$.

Paradoxe de la scission

Prenons $N = 3$. Supposons $K = 2$, avec $p_{\mathrm{A}} = 52$ % et $p_{\mathrm{B}} = 48$ %. L'allocation de Sainte-Laguë (de même que celle au PFR) donne alors, comme de bien entendu, $n_{\mathrm{A}} = 2$ et $n_{\mathrm{B}} = 1$.

Mais le stratège du parti B a une idée. « Divisons-nous, propose-t-il, en deux sous-partis B' et B'', de sorte que $p_{\mathrm{B}'} = 25$ % et $p_{\mathrm{B}''} = 23$ % » : on a alors $K = 3$ et $(p_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{B}'}, p_{\mathrm{B}''}) = (52\ \%, 25\ \%, 23\ \%)$.
On calcule alors qu'on aura $(n_{\mathrm{A}}, n_{\mathrm{B}'}, n_{\mathrm{B}''}) = (1, 1, 1)$ (que ce soit par Sainte-Laguë ou par PFR) : en regroupant les sièges de chaque sous-parti, le parti B obtient alors 2 sièges, et le parti A n'en a plus qu'1 seul !

Paradoxe de la scission

Prenons $N = 3$. Supposons $K = 2$, avec $p_{\mathrm{A}} = 52$ % et $p_{\mathrm{B}} = 48$ %. L'allocation de Sainte-Laguë (de même que celle au PFR) donne alors, comme de bien entendu, $n_{\mathrm{A}} = 2$ et $n_{\mathrm{B}} = 1$.

Mais le stratège du parti B a une idée. « Divisons-nous, propose-t-il, en deux sous-partis B' et B'', de sorte que $p_{\mathrm{B}'} = 25$ % et $p_{\mathrm{B}''} = 23$ % » : on a alors $K = 3$ et $(p_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{B}'}, p_{\mathrm{B}''}) = (52\ \%, 25\ \%, 23\ \%)$.
On calcule alors qu'on aura $(n_{\mathrm{A}}, n_{\mathrm{B}'}, n_{\mathrm{B}''}) = (1, 1, 1)$ (que ce soit par Sainte-Laguë ou par PFR) : en regroupant les sièges de chaque sous-parti, le parti B obtient alors 2 sièges, et le parti A n'en a plus qu'1 seul !

Paradoxe de la scission

On dit qu'une méthode d'allocation présente un paradoxe de la scission lorsqu'il est possible de trouver un nombre de sièges N, un entier K, un $(K+1)$-uplet de proportions $(p_0, \ldots, p_{K-1}, p)$ et une paire de proportions positives p' et p'' avec $p' + p'' = p$ de sorte que le total des sièges alloués aux deux derniers partis pour le $(K+2)$-uplet de proportions $(p_0, \ldots, p_{K-1}, p', p'')$ soit strictement supérieur au nombre de sièges alloués au dernier parti pour le $(K+1)$-uplet $(p_0, \ldots, p_{K-1}, p)$.

Paradoxe de la scission

Prenons $N = 3$. Supposons $K = 2$, avec $p_{\mathrm{A}} = 52\ \%$ et $p_{\mathrm{B}} = 48\ \%$. L'allocation de Sainte-Laguë (de même que celle au PFR) donne alors, comme de bien entendu, $n_{\mathrm{A}} = 2$ et $n_{\mathrm{B}} = 1$.

Mais le stratège du parti B a une idée. « Divisons-nous, propose-t-il, en deux sous-partis B' et B'', de sorte que $p_{\mathrm{B}'} = 25\ \%$ et $p_{\mathrm{B}''} = 23\ \%$ » : on a alors $K = 3$ et $(p_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{B}'}, p_{\mathrm{B}''}) = (52\ \%, 25\ \%, 23\ \%)$.
On calcule alors qu'on aura $(n_{\mathrm{A}}, n_{\mathrm{B}'}, n_{\mathrm{B}''}) = (1, 1, 1)$ (que ce soit par Sainte-Laguë ou par PFR) : en regroupant les sièges de chaque sous-parti, le parti B obtient alors 2 sièges, et le parti A n'en a plus qu'1 seul !

Paradoxe de la scission

On dit qu'une méthode d'allocation présente un paradoxe de la scission lorsqu'il est possible de trouver un nombre de sièges N, un entier K, un $(K+1)$-uplet de proportions $(p_0, \ldots, p_{K-1}, p)$ et une paire de proportions positives p' et p'' avec $p' + p'' = p$ de sorte que le total des sièges alloués aux deux derniers partis pour le $(K+2)$-uplet de proportions $(p_0, \ldots, p_{K-1}, p', p'')$ soit strictement supérieur au nombre de sièges alloués au dernier parti pour le $(K+1)$-uplet $(p_0, \ldots, p_{K-1}, p)$.

La méthode de sainte-Laguë présente un paradoxe de la scission, de même que l'allocation au plus fort reste.

Algorithme de D'Hondt

Méthode de Sainte-Laguë :

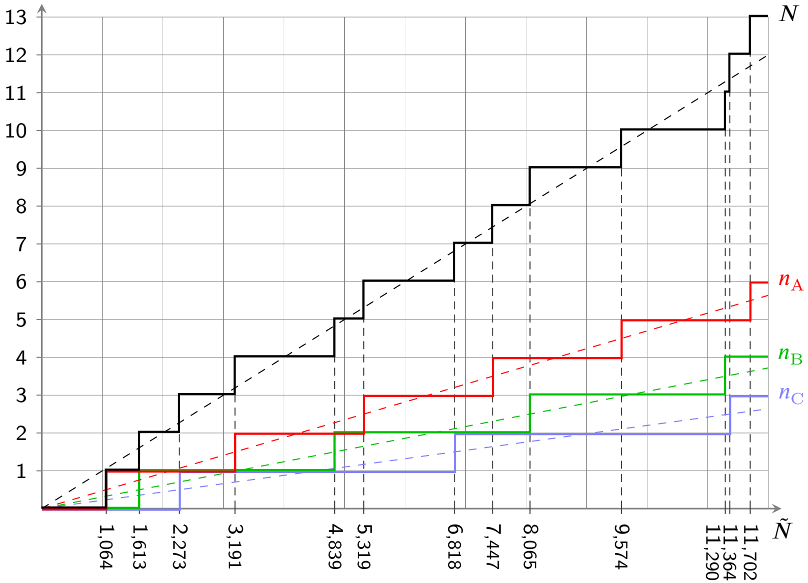
- On ajoute les sièges un par un, jusqu'à atteindre le total à pourvoir.
- Pour chaque parti k, on va maintenir à jour le nombre de sièges alloués (au stade considéré), noté n_k, initialisé à 0, et le « quotient », noté q_k.
- q_k est initialisé à $2p_k$.
- À chaque étape :
  1. On recherche le parti $k_\star$ dont le quotient est maximal ;
  2. On alloue un siège à ce parti : $n_{k_\star} \leftarrow n_{k_\star} + 1$,
  3. On replace le quotient $q_{k_\star}$ par $p_{k_\star} / (n_{k_\star} + 1/2)$ (en utilisant la nouvelle valeur de $n_{k_\star}$).

Algorithme de D'Hondt

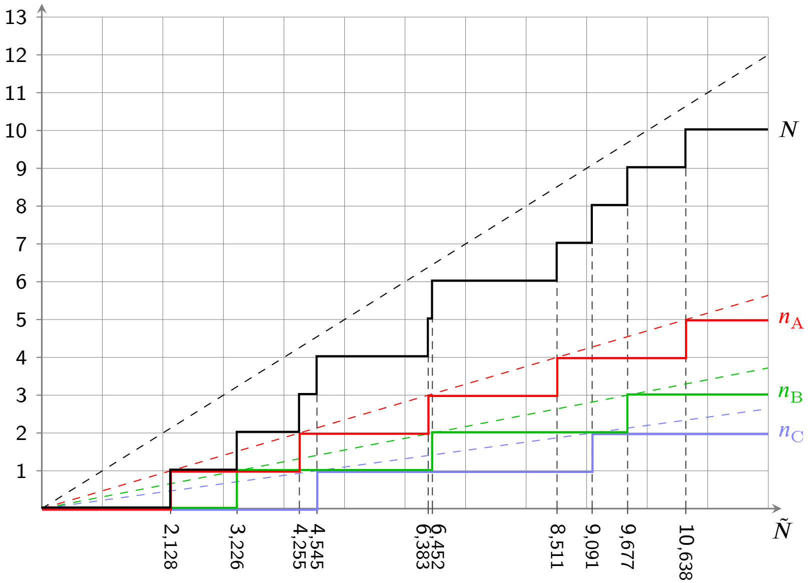
Méthode de D'Hondt :

- On ajoute les sièges un par un, jusqu'à atteindre le total à pourvoir.
- Pour chaque parti k, on va maintenir à jour le nombre de sièges alloués (au stade considéré), noté n_k, initialisé à 0, et le « quotient », noté q_k.
- q_k est initialisé à p_k .
- À chaque étape :
  1. On recherche le parti $k_\star$ dont le quotient est maximal ;
  2. On alloue un siège à ce parti : $n_{k_\star} \leftarrow n_{k_\star} + 1$,
  3. On replace le quotient $q_{k_\star}$ par $p_{k_\star} / (n_{k_\star} + 1 \quad)$ (en utilisant la nouvelle valeur de $n_{k_\star}$).

Visualisation : Ste-Laguë vs D'Hondt



Visualisation : S^{te}-Laguë v^{s} D'Hondt



Avantages de la méthode D'Hondt

Théorème

La méthode D'Hondt ne présente pas de paradoxe de la scission.

Théorème

Parmi toutes les méthodes évitant le paradoxe de la scission, la méthode D'Hondt est optimale au sens de l'optimisation d'une $L^{(\ell)}$-perte basée sur une fonction de perte individuelle ℓ convexe.

Et le paradoxe de la fusion ?

Théorème

Si une méthode d'allocation évite le paradoxe de la fusion, et qu'il y a au moins autant de sièges à pouvoir que de partis, alors tous les partis ayant obtenus une proportion non nulle, si petite soit-elle, obtiendront toujours un siège !

$\rightsquigarrow$ *Toute méthode raisonnable présente un paradoxe de la fusion.*

Et le paradoxe de la fusion ?

Théorème

Si une méthode d'allocation évite le paradoxe de la fusion, et qu'il y a au moins autant de sièges à pouvoir que de partis, alors tous les partis ayant obtenus une proportion non nulle, si petite soit-elle, obtiendront toujours un siège !
$\rightsquigarrow$ *Toute méthode raisonnable présente un paradoxe de la fusion.*

Remarque

Il est néanmoiins moins grave d'avoir un paradoxe de la fusion que de la scission, car autant il est facile de scissionner artificiellement, autant on peut considérer que deux partis n'accepteront de fusionner que si, de fait, ils sont réellement proches l'un de l'autre !

Passage au tableau

Faute d'avoir pu préparer la totalité de mes transparents,
je passe à présent au tableau...