

# Comment bien choisir un \* maire?

<http://www.normalesup.org/~rpeyre/pro/popul/APMEP.pdf>

Rémi Peyre

Journée régionale de l'APMEP Lorraine  
26 mars 2014

---

\*. Ou une :-)

# Type de scrutins considéré

Deux grandes problématiques dans la démocratie :

- Élire un conseil représentatif de la population ;
-

# Type de scrutins considéré

Deux grandes problématiques dans la démocratie :

- Élire un conseil représentatif de la population ;
- Choisir une option parmi plusieurs. \*

---

\*. C'est bien ce qui se passe en pratique dans les élections municipales pour les communes de plus de 1 000 habitants, vu que la liste gagnante est garantie d'avoir la majorité absolue des conseillers.

# Type de scrutins considéré

## ☛ Choisir une option parmi plusieurs

Plusieurs types de questions concernant des choix d'options :

- Quantitatives (« Quel taux d'imposition ? » « Quelle limite de vitesse sur la route ? » « Combien d'élèves par classe ? ») ;

# Type de scrutins considéré

## ☛ Choisir une option parmi plusieurs

Plusieurs types de questions concernant des choix d'options :

- Quantitatives (« Quel taux d'imposition ? » « Quelle limite de vitesse sur la route ? » « Combien d'élèves par classe ? ») ;
- Binaires (« Construisons-nous un nouveau stade ? » « Crimée ukrainienne ou russe ? » « Faut-il pénaliser la prostitution ? ») ;

# Type de scrutins considéré

## ☛ Choisir une option parmi plusieurs

Plusieurs types de questions concernant des choix d'options :

- Quantitatives (« Quel taux d'imposition ? » « Quelle limite de vitesse sur la route ? » « Combien d'élèves par classe ? ») ;
- Binaires (« Construisons-nous un nouveau stade ? » « Crimée ukrainienne ou russe ? » « Faut-il pénaliser la prostitution ? ») ;
- Qualitatives (« Qui choisir comme maire ? » « Quel tracé pour la route ? » « Quel système de scrutin ? »).

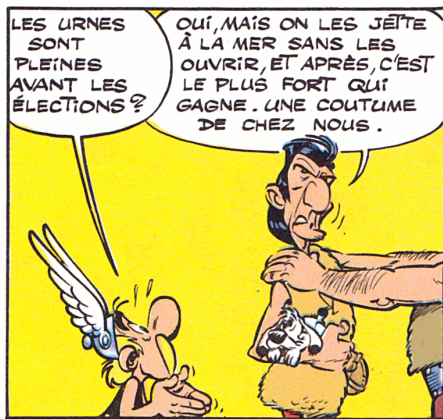
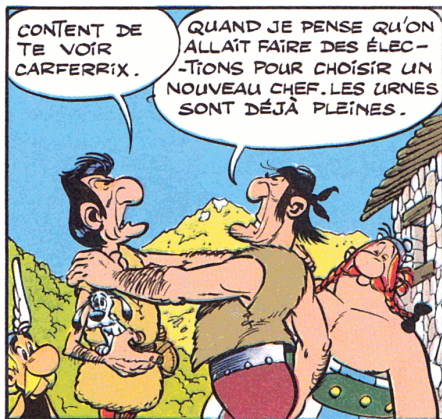
# Type de scrutins considéré

- ☛ Choisir une option parmi plusieurs
- ☛ Question qualitative (« Qui choisir comme maire ? » « Quel tracé pour la route ? » « Quel système de scrutin ? »)

# Type de scrutins considéré

- ☛ Choisir une option parmi plusieurs
  - ☛ Question qualitative (« Qui choisir comme maire ? » « Quel tracé pour la route ? » « Quel système de scrutin ? »)
- ☛ Pour fixer les idées, on se placera dans le cas du choix d'un maire ; on parlera donc de « candidats » pour désigner les options.

# La méthode corse



# Plan

- 1 De la pertinence d'un nouveau mode de scrutin
- 2 Existence du vainqueur de Condorcet
- 3 Aspects pratiques

# Plan

## 1 De la pertinence d'un nouveau mode de scrutin

- Les paradoxes des modes de scrutin usuels
- Conséquences des paradoxes
- Analyse des paradoxes
- Notion de vainqueur de Condorcet

## 2 Existence du vainqueur de Condorcet

## 3 Aspects pratiques

# Plan

## 1 De la pertinence d'un nouveau mode de scrutin

- Les paradoxes des modes de scrutin usuels
  - Conséquences des paradoxes
  - Analyse des paradoxes
  - Notion de vainqueur de Condorcet

## 2 Existence du vainqueur de Condorcet

## 3 Aspects pratiques

# Le paradoxe du seuil

Dans une élection municipale, on peut décrire (de façon simplifiée) le scrutin ainsi :

- 1 Au premier tour, chaque électeur vote pour le candidat de son choix ;
- 2 À l'issue du premier tour, les candidats ayant obtenu moins de 10 % des voix sont éliminés ;
- 3 Au second tour, chaque électeur vote pour le candidat de son choix parmi ceux qui restent ;
- 4 Le candidat ayant reçu le plus de voix au second tour est élu maire.

# Le paradoxe du seuil

Trois partis en compétition : gauche ( $G$ ), droite modérée ( $DM$ ) et extrême-droite ( $DR$ ).

Premier cas :

**G** 48 % ;  
**DM** 43 % ;  
**DR** 9 %.

# Le paradoxe du seuil

Trois partis en compétition : gauche ( $G$ ), droite modérée ( $DM$ ) et extrême-droite ( $DR$ ).

Premier cas :

**G** 48 % ;  
**DM** 43 % ;  
**DR** 9 %.

Second tour entre  $G$  et  $DM$  ; les voix de  $DR$  se reportent sur  $DM$  qui obtient alors 52 % contre 48 % pour  $G$ .

# Le paradoxe du seuil

Trois partis en compétition : gauche ( $G$ ), droite modérée ( $DM$ ) et extrême-droite ( $DR$ ).

Premier cas :

$G$  48 % ;  
 $DM$  43 % ;  
 $DR$  9 %.

Second tour entre  $G$  et  $DM$  ; les voix de  $DR$  se reportent sur  $DM$  qui obtient alors 52 % contre 48 % pour  $G$ .

⇒  $DM$  est élu.

# Le paradoxe du seuil

Trois partis en compétition : gauche ( $G$ ), droite modérée ( $DM$ ) et extrême-droite ( $DR$ ).

Premier cas :

$G$  48 % ;  
 $DM$  43 % ;  
 $DR$  9 %.

Second tour entre  $G$  et  $DM$  ; les voix de  $DR$  se reportent sur  $DM$  qui obtient alors 52 % contre 48 % pour  $G$ .

⇒  $DM$  est élu.

Second cas :

$G$  46 % ;  
 $DM$  43 % ;  
 $DR$  11 %.

# Le paradoxe du seuil

Trois partis en compétition : gauche ( $G$ ), droite modérée ( $DM$ ) et extrême-droite ( $DR$ ).

Premier cas :

$G$  48 % ;  
 $DM$  43 % ;  
 $DR$  9 %.

Second tour entre  $G$  et  $DM$  ; les voix de  $DR$  se reportent sur  $DM$  qui obtient alors 52 % contre 48 % pour  $G$ .

⇒  $DM$  est élu.

Second cas :

$G$  46 % ;  
 $DM$  43 % ;  
 $DR$  11 %.

Aucun éliminé ; second tour identique au premier tour ;  $G$  en tête avec 46 %.

# Le paradoxe du seuil

Trois partis en compétition : gauche ( $G$ ), droite modérée ( $DM$ ) et extrême-droite ( $DR$ ).

Premier cas :

$G$  48 % ;  
 $DM$  43 % ;  
 $DR$  9 %.

Second tour entre  $G$  et  $DM$  ; les voix de  $DR$  se reportent sur  $DM$  qui obtient alors 52 % contre 48 % pour  $G$ .

⇒  $DM$  est élu.

Second cas :

$G$  46 % ;  
 $DM$  43 % ;  
 $DR$  11 %.

Aucun éliminé ; second tour identique au premier tour ;  $G$  en tête avec 46 %.

⇒  $G$  est élu.

# Le paradoxe du seuil

**Paradoxe :** Alors que les opinions politiques des électeurs se sont déplacées pour favoriser le candidat le plus à droite au détriment du candidat le plus à gauche, le résultat du scrutin élit maintenant un candidat plus à gauche que précédemment !

# Le paradoxe de la division

Dans une élection présidentielle, le scrutin se déroule ainsi :

- 1 Au premier tour, chaque électeur vote pour le candidat de son choix ;
- 2 À l'issue du premier tour, seuls les deux candidats ayant obtenu le plus de voix restent en lice ;
- 3 Au second tour, chaque électeur vote pour le candidat de son choix parmi les deux qualifiés ;
- 4 Le candidat ayant reçu le plus de voix au second tour est élu président.

# Le paradoxe de la division

Cas de base : Quatre partis en compétition : gauche radicale (*GR*), gauche modérée (*GM*), droite modérée (*DM*) et droite radicale (*DR*).

**GR** 15 %;

**GM** 37 %;

**DM** 26 %;

**DR** 22 %.

# Le paradoxe de la division

Cas de base : Quatre partis en compétition : gauche radicale (*GR*), gauche modérée (*GM*), droite modérée (*DM*) et droite radicale (*DR*).

**GR** 15 %;

**GM** 37 %;

**DM** 26 %;

**DR** 22 %.

Second tour entre *GM* et *DM* ; *GM* récupère toutes les voix de gauche, soit 52 %, contre 48 % pour *DM* qui récupère toutes voix de droite.

# Le paradoxe de la division

Cas de base : Quatre partis en compétition : gauche radicale (*GR*), gauche modérée (*GM*), droite modérée (*DM*) et droite radicale (*DR*).

**GR** 15 % ;

**GM** 37 % ;

**DM** 26 % ;

**DR** 22 %.

Second tour entre *GM* et *DM* ; *GM* récupère toutes les voix de gauche, soit 52 %, contre 48 % pour *DM* qui récupère toutes voix de droite.

⇒ **GM** est élu.

# Le paradoxe de la division

Cas de base : Quatre partis en compétition : gauche radicale (*GR*), gauche modérée (*GM*), droite modérée (*DM*) et droite radicale (*DR*).

**GR** 15 %;

**GM** 37 %;

**DM** 26 %;

**DR** 22 %.

Second tour entre *GM* et *DM*; *GM* récupère toutes les voix de gauche, soit 52 %, contre 48 % pour *DM* qui récupère toutes voix de droite.

⇒ ***GM*** est élu.

Variante : Les préférences des électeurs sont les mêmes, mais la gauche modérée présente deux candidats : *GM<sub>1</sub>* et *GM<sub>2</sub>*.

# Le paradoxe de la division

Cas de base : Quatre partis en compétition : gauche radicale (*GR*), gauche modérée (*GM*), droite modérée (*DM*) et droite radicale (*DR*).

**GR** 15 % ;

**GM** 37 % ;

**DM** 26 % ;

**DR** 22 %.

Second tour entre *GM* et *DM* ; *GM* récupère toutes les voix de gauche, soit 52 %, contre 48 % pour *DM* qui récupère toutes voix de droite.

⇒ **GM** est élu.

Variante : Les préférences des électeurs sont les mêmes, mais la gauche modérée présente deux candidats : *GM<sub>1</sub>* et *GM<sub>2</sub>*.

**GR** 15 % ;

**GM<sub>1</sub>** 19 % ;

**GM<sub>2</sub>** 18 % ;

**DM** 26 % ;

**DR** 22 %.

# Le paradoxe de la division

Cas de base : Quatre partis en compétition : gauche radicale (*GR*), gauche modérée (*GM*), droite modérée (*DM*) et droite radicale (*DR*).

**GR** 15 % ;

**GM** 37 % ;

**DM** 26 % ;

**DR** 22 %.

Second tour entre *GM* et *DM* ; *GM* récupère toutes les voix de gauche, soit 52 %, contre 48 % pour *DM* qui récupère toutes voix de droite.

⇒ **GM** est élu.

Variante : Les préférences des électeurs sont les mêmes, mais la gauche modérée présente deux candidats : *GM<sub>1</sub>* et *GM<sub>2</sub>*.

**GR** 15 % ;

**GM<sub>1</sub>** 19 % ;

**GM<sub>2</sub>** 18 % ;

**DM** 26 % ;

**DR** 22 %.

Second tour entre *DM* et *DR* ; toutes les voix de gauche se reportent sur *DM* qui gagne avec 78 %.

# Le paradoxe de la division

Cas de base : Quatre partis en compétition : gauche radicale (*GR*), gauche modérée (*GM*), droite modérée (*DM*) et droite radicale (*DR*).

**GR** 15 % ;

**GM** 37 % ;

**DM** 26 % ;

**DR** 22 %.

Second tour entre *GM* et *DM* ; *GM* récupère toutes les voix de gauche, soit 52 %, contre 48 % pour *DM* qui récupère toutes voix de droite.

⇒ ***GM*** est élu.

Variante : Les préférences des électeurs sont les mêmes, mais la gauche modérée présente deux candidats : *GM*<sub>1</sub> et *GM*<sub>2</sub>.

**GR** 15 % ;

**GM**<sub>1</sub> 19 % ;

**GM**<sub>2</sub> 18 % ;

**DM** 26 % ;

**DR** 22 %.

Second tour entre ***DM*** et ***DR*** ; toutes les voix de gauche se reportent sur ***DM*** qui gagne avec 78 %.

⇒ ***DM*** est élu.

# Le paradoxe de la division

**Paradoxe :** Alors que les opinions politiques des électeurs n'ont pas changé, et que la gauche modérée a proposé aux électeurs plus de choix que précédemment, elle perd l'élection qu'elle aurait gagné sinon !

# Plan

## 1 De la pertinence d'un nouveau mode de scrutin

- Les paradoxes des modes de scrutin usuels
- **Conséquences des paradoxes**
- Analyse des paradoxes
- Notion de vainqueur de Condorcet

## 2 Existence du vainqueur de Condorcet

## 3 Aspects pratiques

# Les paradoxes sont nuisibles

Les paradoxes évoqués ci-dessous sont le reflet d'une mauvaise conception de la démocratie, car :

- Il semble clair que dans chaque cas il y a au moins une des deux situations où le résultat ne reflète pas la véritable préférence des électeurs ;

# Les paradoxes sont nuisibles

Les paradoxes évoqués ci-dessous sont le reflet d'une mauvaise conception de la démocratie, car :

- Il semble clair que dans chaque cas il y a au moins une des deux situations où le résultat ne reflète pas la véritable préférence des électeurs ;
- Les électeurs sont amenés à voter de façon "stratégique", en fonction de ce qu'ils pensent que les autres vont voter, plutôt que d'exprimer leur opinion sincère, ce qui rend le scrutin moins honnête et interprétable ;

# Les paradoxes sont nuisibles

Les paradoxes évoqués ci-dessous sont le reflet d'une mauvaise conception de la démocratie, car :

- Il semble clair que dans chaque cas il y a au moins une des deux situations où le résultat ne reflète pas la véritable préférence des électeurs ;
- Les électeurs sont amenés à voter de façon "stratégique", en fonction de ce qu'ils pensent que les autres vont voter, plutôt que d'exprimer leur opinion sincère, ce qui rend le scrutin moins honnête et interprétable ;
- Ces effets stratégiques font qu'on hésite à exprimer une opinion originale ; il en résulte un appauvrissement de facto du choix proposé aux électeurs, avec une prime aux grands partis et aux personnalités déjà en place.

# Plan

## 1 De la pertinence d'un nouveau mode de scrutin

- Les paradoxes des modes de scrutin usuels
- Conséquences des paradoxes
- Analyse des paradoxes
- Notion de vainqueur de Condorcet

## 2 Existence du vainqueur de Condorcet

## 3 Aspects pratiques

# La sagesse du Tigre

*« Pour prendre une décision, il faut être un nombre impair de personnes ; et trois c'est déjà trop. »*

Georges CLEMENCEAU

# La sagesse du Tigre

*« Pour prendre une décision, il faut être un nombre impair de personnes ; et trois c'est déjà trop. »*

Georges CLEMENCEAU

Ici nous dirons plutôt : « Pour trancher entre plusieurs options, trois choix possibles c'est déjà trop... »

# Duels

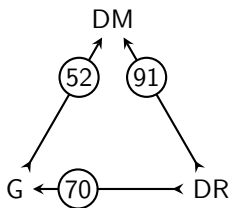
Pour mieux comprendre quelle est la préférence véritable des électeurs dans les paradoxes précédents, ramenons-nous au cas le plus simple d'un duel entre deux candidats, et examinons tous les résultats de duels possibles.

## Notation

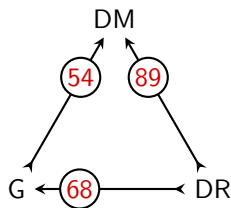
«  $Y \xrightarrow{61} X$  » signifie qu'en cas de duel entre les candidats  $Y$  et  $X$ ,  $X$  l'emporterait par 61 % des voix.

# Cas du paradoxe du seuil

**G** 48 %;  
**DM** 43 %;  
**DR** 9 %.



**G** 46 %;  
**DM** 43 %;  
**DR** 11 %.



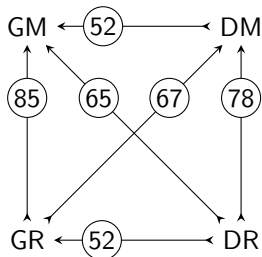
# Cas du paradoxe de la division

**GR** 15 % ;

**GM** 37 % ;

**DM** 26 % ;

**DR** 22 % .



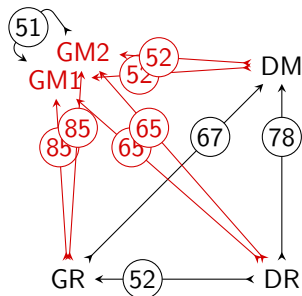
**GR** 15 % ;

**GM<sub>1</sub>** 19 % ;

**GM<sub>2</sub>** 18 % ;

**DM** 26 % ;

**DR** 22 % .



# Plan

## 1 De la pertinence d'un nouveau mode de scrutin

- Les paradoxes des modes de scrutin usuels
- Conséquences des paradoxes
- Analyse des paradoxes
- Notion de vainqueur de Condorcet

## 2 Existence du vainqueur de Condorcet

## 3 Aspects pratiques

# Définition

## Définition (Vainqueur de Condorcet)

Si, parmi les candidats proposés, il en existe un qui est préféré à n'importe quel autre en situation de duel, alors ce candidat est appelé *vainqueur de Condorcet* ou (dans cet exposé) *condorcier*.

# Définition

## Définition (Vainqueur de Condorcet)

Si, parmi les candidats proposés, il en existe un qui est préféré à n'importe quel autre en situation de duel, alors ce candidat est appelé *vainqueur de Condorcet* ou (dans cet exposé) *condorcier*.

## Définition (Critère de Condorcet)

On dit qu'un système de scrutin satisfait le *critère de Condorcet* lorsque ce système conduit à l'élection du condorcier, dès lors qu'il en existe un. Ce critère a été énoncé pour la première fois par le marquis de Condorcet en 1785.



# Définition

## Définition (Vainqueur de Condorcet)

Si, parmi les candidats proposés, il en existe un qui est préféré à n'importe quel autre en situation de duel, alors ce candidat est appelé *vainqueur de Condorcet* ou (dans cet exposé) *condorcier*.

## Proposition (Unicité du condorcier)

*Dans un scrutin donné, il ne peut exister qu'un seul condorcier.*

# Définition

## Définition (Vainqueur de Condorcet)

Si, parmi les candidats proposés, il en existe un qui est préféré à n'importe quel autre en situation de duel, alors ce candidat est appelé *vainqueur de Condorcet* ou (dans cet exposé) *condorcier*.

## Proposition (Unicité du condorcier)

*Dans un scrutin donné, il ne peut exister qu'un seul condorcier.*

## Démonstration.

*En effet, s'il existait deux condorciens, chacun de ces condorciens devrait être préféré à l'autre dans le duel qui les oppose, ce qui serait absurde.*



# Définition

## Définition (Vainqueur de Condorcet)

Si, parmi les candidats proposés, il en existe un qui est préféré à n'importe quel autre en situation de duel, alors ce candidat est appelé *vainqueur de Condorcet* ou (dans cet exposé) *condorcier*.

## Exemple

- Dans notre exemple du scrutin municipal, le candidat DM est condorcier, que ce soit dans la première ou la seconde situation.
- Dans notre exemple du scrutin présidentiel, le candidat GM est condorcier dans la première situation, et le candidat  $GM_1$  l'est dans la seconde situation.

# Paradoxes résolus !

## Théorème (pas de paradoxe de seuil)

*Si un candidat perd des voix au profit d'autres, cela ne peut pas l'aider à devenir condorcien.*

# Paradoxes résolus !

## Théorème (pas de paradoxe de seuil)

*Si un candidat perd des voix au profit d'autres, cela ne peut pas l'aider à devenir condorcien.*

## Démonstration.

*En effet, le fait d'être condorcien dépend uniquement des résultats en situation de duels. Mais dans une situation de duel, si vous perdez des partisans, cela ne peut qu'être mauvais pour vous...*



# Paradoxes résolus !

## **Théorème (pas de paradoxe de seuil)**

*Si un candidat perd des voix au profit d'autres, cela ne peut pas l'aider à devenir condorcier.*

## **Théorème (pas de paradoxe de division)**

*Si un parti présente deux candidats au lieu d'un seul, cela ne peut pas l'empêcher d'avoir le condorcier.*

# Paradoxes résolus !

## **Théorème (pas de paradoxe de seuil)**

*Si un candidat perd des voix au profit d'autres, cela ne peut pas l'aider à devenir condorcier.*

## **Théorème (pas de paradoxe de division)**

*Si un parti présente deux candidats au lieu d'un seul, cela ne peut pas l'empêcher d'avoir le condorcier.*

## **Démonstration.**

*En effet, le résultats du duel entre un candidat du parti et un candidat d'un autre parti ne dépendent pas du fait d'avoir présenté un ou plusieurs candidats. Si le parti était donc condorcier en situation de candidat unique, après division, celui des deux candidats du parti qui bat l'autre continue de battre aussi tous les candidats hors-parti et est donc le nouveau condorcier.*



# Paradoxes résolus !

## **Théorème (pas de paradoxe de seuil)**

*Si un candidat perd des voix au profit d'autres, cela ne peut pas l'aider à devenir condorcier.*

## **Théorème (pas de paradoxe de division)**

*Si un parti présente deux candidats au lieu d'un seul, cela ne peut pas l'empêcher d'avoir le condorcier.*

## **Théorème (pas de paradoxe de fusion)**

*À l'inverse, il ne sert à rien à un parti de présenter volontairement plusieurs candidats pour empêcher un adversaire d'être condorcier.*

# Paradoxes résolus !

## **Théorème (pas de paradoxe de seuil)**

*Si un candidat perd des voix au profit d'autres, cela ne peut pas l'aider à devenir condorcier.*

## **Théorème (pas de paradoxe de division)**

*Si un parti présente deux candidats au lieu d'un seul, cela ne peut pas l'empêcher d'avoir le condorcier.*

## **Théorème (pas de paradoxe de fusion)**

*À l'inverse, il ne sert à rien à un parti de présenter volontairement plusieurs candidats pour empêcher un adversaire d'être condorcier.*

## **Démonstration.**

*La raison est la même que précédemment : l'adversaire qui était condorcier dans la première situation va continuer à battre les candidats du parti stratège en duel, que celui-ci ait présenté un ou plusieurs candidats.*

# Plan

## 1 De la pertinence d'un nouveau mode de scrutin

## 2 Existence du vainqueur de Condorcet

- Situation générale
- Premier théorème de l'électeur médian
- Second théorème de l'électeur médian
- Troisième théorème de l'électeur médian

## 3 Aspects pratiques

# Plan

- 1 De la pertinence d'un nouveau mode de scrutin
- 2 Existence du vainqueur de Condorcet**
  - Situation générale
  - Premier théorème de l'électeur médian
  - Second théorème de l'électeur médian
  - Troisième théorème de l'électeur médian
- 3 Aspects pratiques

# Oui, mais...

## Définition (Vainqueur de Condorcet)

Si, parmi les candidats proposés, il en existe un qui est préféré à n'importe quel autre en situation de duel, alors ce candidat est appelé *vainqueur de Condorcet* ou (dans cet exposé) *condorcier*.

# Oui, mais...

## Définition (Vainqueur de Condorcet)

Si, parmi les candidats proposés, il en existe un qui est préféré à n'importe quel autre en situation de duel, alors ce candidat est appelé *vainqueur de Condorcet* ou (dans cet exposé) *condorcier*.

## Question

Existe-t-il toujours un condorcier ?

# Oui, mais...

## Définition (Vainqueur de Condorcet)

Si, parmi les candidats proposés, il en existe un qui est préféré à n'importe quel autre en situation de duel, alors ce candidat est appelé *vainqueur de Condorcet* ou (dans cet exposé) *condorcier*.

## Question

Existe-t-il toujours un condorcier ?

## Proposition (Paradoxe de Condorcet, 1785)

**NON!**

# Oui, mais...

## Contre-exemple

On considère trois candidats *Cyan* (C), *Jaune* (J) et *Magenta* (M); et trois électeurs *Orange* (o), *Turquoise* (t) et *Violet* (v).



Chaque électeur préfère les différents candidats par ordre de proximité, soit :

$$o : J > M > C ;$$

$$t : C > J > M ;$$

$$v : M > C > J .$$

Au final, en duel :

- C bat J mais est battu par M ;
- J bat M mais est battu par C ;
- M bat C mais est battu par J.

⇒ **Il n'y a pas de condorcier !**

# Plan

## 1 De la pertinence d'un nouveau mode de scrutin

## 2 Existence du vainqueur de Condorcet

- Situation générale
- Premier théorème de l'électeur médian
- Second théorème de l'électeur médian
- Troisième théorème de l'électeur médian

## 3 Aspects pratiques

# Profil de préférences en $\Lambda$

## Définition (Préférence en $\Lambda$ )

On se place dans un cas où les candidats puissent être classés sur un axe politique gauche/droite. On dit alors que les électeurs ont un *profil de préférences en  $\Lambda$*  lorsque, quand on parcourt la liste des candidats de gauche à droite, le niveau de satisfaction d'un électeur pour les différents candidats croît, puis décroît.

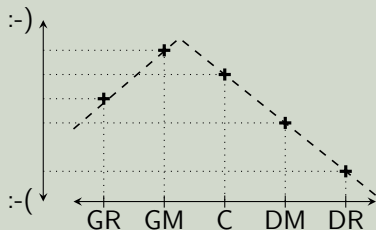
# Profil de préférences en $\Lambda$

## Définition (Préférence en $\Lambda$ )

On se place dans un cas où les candidats puissent être classés sur un axe politique gauche/droite. On dit alors que les électeurs ont un *profil de préférences en  $\Lambda$*  lorsque, quand on parcourt la liste des candidats de gauche à droite, le niveau de satisfaction d'un électeur pour les différents candidats croît, puis décroît.

## Exemple

On considère cinq candidats qui sont, de gauche à droite : GR, GM, C, DM, DR. Alors les ordres de préférence suivants sont en  $\Lambda$  :



$$GM > C > GR > DM > DR$$

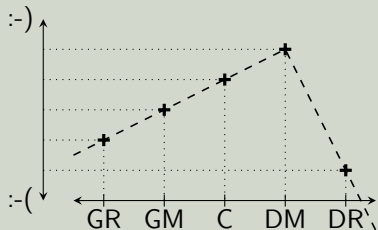
# Profil de préférences en $\Lambda$

## Définition (Préférence en $\Lambda$ )

On se place dans un cas où les candidats puissent être classés sur un axe politique gauche/droite. On dit alors que les électeurs ont un *profil de préférences en  $\Lambda$*  lorsque, quand on parcourt la liste des candidats de gauche à droite, le niveau de satisfaction d'un électeur pour les différents candidats croît, puis décroît.

## Exemple

On considère cinq candidats qui sont, de gauche à droite : GR, GM, C, DM, DR. Alors les ordres de préférence suivants sont en  $\Lambda$  :



$$C > GM > DM > DR > GR$$

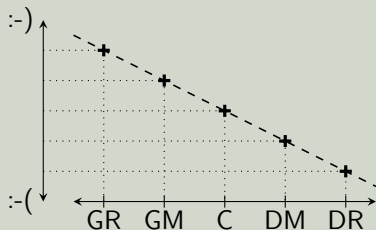
# Profil de préférences en $\Lambda$

## Définition (Préférence en $\Lambda$ )

On se place dans un cas où les candidats puissent être classés sur un axe politique gauche/droite. On dit alors que les électeurs ont un *profil de préférences en  $\Lambda$*  lorsque, quand on parcourt la liste des candidats de gauche à droite, le niveau de satisfaction d'un électeur pour les différents candidats croît, puis décroît.

## Exemple

On considère cinq candidats qui sont, de gauche à droite : GR, GM, C, DM, DR. Alors les ordres de préférence suivants sont en  $\Lambda$  :



$$GR > GM > C > DM > DR$$

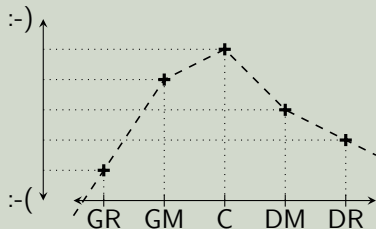
# Profil de préférences en $\Lambda$

## Définition (Préférence en $\Lambda$ )

On se place dans un cas où les candidats puissent être classés sur un axe politique gauche/droite. On dit alors que les électeurs ont un *profil de préférences en  $\Lambda$*  lorsque, quand on parcourt la liste des candidats de gauche à droite, le niveau de satisfaction d'un électeur pour les différents candidats croît, puis décroît.

## Exemple

On considère cinq candidats qui sont, de gauche à droite : GR, GM, C, DM, DR. Alors les ordres de préférence suivants sont en  $\Lambda$  :



$$C > GM > DM > DR > GR$$

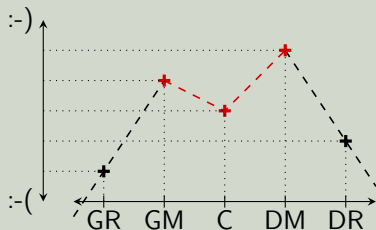
# Profil de préférences en $\Lambda$

## Définition (Préférence en $\Lambda$ )

On se place dans un cas où les candidats puissent être classés sur un axe politique gauche/droite. On dit alors que les électeurs ont un *profil de préférences en  $\Lambda$*  lorsque, quand on parcourt la liste des candidats de gauche à droite, le niveau de satisfaction d'un électeur pour les différents candidats croît, puis décroît.

## Exemple

On considère cinq candidats qui sont, de gauche à droite : GR, GM, C, DM, DR.  
 Par contre, l'ordre de préférence suivant n'est pas en  $\Lambda$  :



$$C > GM > DM > DR > GR$$

# Profil de préférences en $\Lambda$

## DÉFI !

Pour  $n$  candidats, combien y a-t-il de profils de préférence en  $\Lambda$  possibles ?

# Premier théorème de l'électeur médian

## Théorème

*Si les profils de préférence des électeurs sont en  $\Lambda$ , alors il existe un condorcier.*

# Premier théorème de l'électeur médian

## Théorème

*Si les profils de préférence des électeurs sont en  $\Lambda$ , alors il existe un condorcier.*

## Démonstration.

Classons les électeurs de gauche à droite en fonction de leur candidat préféré : '1' est l'électeur dont le candidat favori est la plus à gauche de tous, '2' le suivant, ..., et ' $k$ ' celui dont l'électeur favori est le plus à droite. Soit  $F_* := F_{(k+1)/2}$  le candidat préféré de l'électeur "du milieu". J'affirme qu'alors  $F_*$  est un condorcier. Considérons en effet un autre candidat  $G$ , par exemple plus à droite que  $F_*$ . Alors, comme les électeurs 1 à  $(k+1)/2$  préfèrent un candidat au moins aussi à gauche que  $F_*$ , d'après l'hypothèse de profil en  $\Lambda$ , ils préfèrent  $F_*$  à  $G$ .  $F_*$  a donc le soutien d'au moins  $(k+1)/2$  électeurs en duel contre  $G$ , ce qui constitue une majorité ; et il en va de même contre tout autre adversaire.  $\square$

# Premier théorème de l'électeur médian

## Théorème

*Si les profils de préférence des électeurs sont en  $\Lambda$ , alors il existe un condorcier.*

## Remarque

Le condorcier est donc, parmi les candidats préférés de chaque électeur (en comptant les répétitions), celui qui est situé "au milieu" d'un classement de gauche à droite.

# Premier théorème de l'électeur médian

## Théorème

*Si les profils de préférence des électeurs sont en  $\Lambda$ , alors il existe un condorcier.*

## Exemple

Considérons les 5 profils en  $\Lambda$   
suivants :

- $GM > CE > GR > DM > DR$
- $DM > CE > GM > GR > DR$
- $GR > GM > CE > DM > DR$
- $CE > GM > DM > DR > GR$
- $DM > DR > CE > GM > GR$

# Premier théorème de l'électeur médian

## Théorème

*Si les profils de préférence des électeurs sont en  $\Lambda$ , alors il existe un condorcier.*

## Exemple

Classés de gauche à droite, on a l'ordre suivant :

①  $GR > GM > CE > DM > DR$

②  $GM > CE > GR > DM > DR$

③  $CE > GM > DM > DR > GR$

④  $DM > DR > CE > GM > GR$

⑤  $DM > CE > GM > GR > DR$

# Premier théorème de l'électeur médian

## Théorème

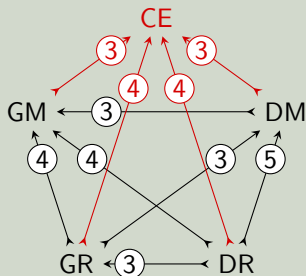
Si les profils de préférence des électeurs sont en  $\Lambda$ , alors il existe un condorcier.

## Exemple

Classés de gauche à droite, on a l'ordre suivant :

- ①  $GR > GM > CE > DM > DR$
- ②  $GM > CE > GR > DM > DR$
- ③  $CE > GM > DM > DR > GR$
- ④  $DM > DR > CE > GM > GR$
- ⑤  $DM > CE > GM > GR > DR$

D'après le théorème, c'est donc  $CE$  qui doit être le condorcier, ce qui est effectivement le cas :



# Critère de Condorcet et classement

## Corolaire

*Sous l'hypothèse de profils en  $\Lambda$ , on est systématiquement assuré de l'existence d'un vainqueur de Condorcet. Du coup, si le condorcier avait été absent, il y aurait eu un autre vainqueur, qu'on pourrait appeler "second de Condorcier". Si le second avait aussi été absent, il aurait aussi pu y avoir un troisième, etc. Un corolaire du théorème de l'électeur médian est donc qu'on peut classer les candidats du "premier" au "dernier", chaque candidat étant majoritairement préféré à tout autre candidat moins bien classé.*

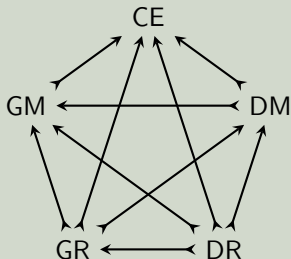
# Critère de Condorcet et classement

## Corolaire

*On peut classer les candidats du "premier" au "dernier", chaque candidat étant majoritairement préféré à tout autre candidat moins bien classé.*

## Exemple

Dans notre exemple, nous avons le diagramme de duels suivant :



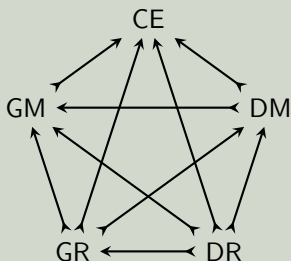
# Critère de Condorcet et classement

## Corolaire

*On peut classer les candidats du "premier" au "dernier", chaque candidat étant majoritairement préféré à tout autre candidat moins bien classé.*

## Exemple

Dans notre exemple, nous avons le diagramme de duels suivant :



Cela correspond au classement suivant :

- 1 CE
- 2 GM
- 3 DM
- 4 GR
- 5 DR

# Critère de Condorcet et classement

## Corolaire

*On peut classer les candidats du “premier” au “dernier”, chaque candidat étant majoritairement préféré à tout autre candidat moins bien classé.*

## Remarque

Dans le cas des profils en  $\Lambda$ , il n'y a pas d'interprétation simple de ce classement général, car l'identité « l'électeur médian » est susceptible de dépendre des candidats en lice.

# Plan

## 1 De la pertinence d'un nouveau mode de scrutin

## 2 Existence du vainqueur de Condorcet

- Situation générale
- Premier théorème de l'électeur médian
- Second théorème de l'électeur médian
- Troisième théorème de l'électeur médian

## 3 Aspects pratiques

# Préférences décroisées

Le modèle du profil de préférences en  $\Lambda$  n'est pas très réaliste, car il fait comme si les électeurs se décidaient uniquement en fonction du positionnement politique des candidats, et pas des compétences intrinsèques de ceux-ci...

# Préférences décroisées

## Définition (Préférences décroisées)

Supposons que candidats *et électeurs* puissent être rangés de gauche à droite. On dit qu'il y a *préférences décroisées* dans les conditions suivantes : si l'électeur  $b$  est plus à droite que  $a$  et que la candidat  $Y$  est plus à droite que  $X$ , alors il n'est pas possible que  $a$  préfère  $Y$  à  $X$  mais que  $b$  préfère  $X$  à  $Y$ .

# Préférences décroisées

## Définition (Préférences décroisées)

Supposons que candidats *et électeurs* puissent être rangés de gauche à droite. On dit qu'il y a *préférences décroisées* dans les conditions suivantes : si l'électeur  $b$  est plus à droite que  $a$  et que la candidat  $Y$  est plus à droite que  $X$ , alors il n'est pas possible que  $a$  préfère  $Y$  à  $X$  mais que  $b$  préfère  $X$  à  $Y$ .

## Exemple

Pour 4 candidats classés de gauche à droite  $GR < GM < DM < DR$  et 5 électeurs  $e_1 < e_2 < \dots < e_5$ , le profil de préférences suivant est décroisé :

$$e_1 : GR > GM > DM > DR ;$$

$$e_2 : GR > DM > GM > DR ;$$

$$e_3 : DM > GM > GR > DR ;$$

$$e_4 : DM > GM > DR > GR ;$$

$$e_5 : DR > DM > GM > GR.$$

# Préférences décroisées

## Exemple

Pour 4 candidats classés de gauche à droite  $GR < GM < DM < DR$  et 5 électeurs  $e_1 < e_2 < \dots < e_5$ , le profil de préférences suivant est décroisé :

$$e_1 : GR > GM > DM > DR ;$$

$$e_2 : GR > DM > GM > DR ;$$

$$e_3 : DM > GM > GR > DR ;$$

$$e_4 : DM > GM > DR > GR ;$$

$$e_5 : DR > DM > GM > GR.$$

## Remarque

J'ai obtenu ce modèle en posant qu'un électeur de positionnement  $p_e$  associe à un candidat de positionnement  $p_A$  et de compétence  $c_A$  le "score"  $c_c - (p_c - p_e)^2$ . Ici le candidat  $GM$  est supposé moins compétent que les autres, ce qui explique que le profil de l'électeur  $e_2$  ne soit pas en  $\Lambda$ .

# Second théorème de l'électeur médian

## Théorème

*Sous l'hypothèse de préférences décroissées, il y a un condorcier à l'élection.*

# Second théorème de l'électeur médian

## Théorème

*Sous l'hypothèse de préférences décroissées, il y a un condorcier à l'élection.*

## Démonstration.

Ordonnons les électeurs du plus à gauche, numéroté '1', au plus à droite, numéroté ' $k$ '. Soit  $C_*$  le candidat préféré de l'électeur  $(k+1)/2$ . Alors  $C_*$  est condorcier : en effet, considérons un autre candidat  $D$ , par exemple politiquement plus à droite que  $C_*$ . Dans la mesure où l'électeur  $(k+1)/2$  préférerait  $C_*$  à  $D$ , d'après l'hypothèse de préférences décroissées, il en va de même des électeurs  $(k-1)/2, \dots$  et 1. On a donc au moins  $k/2 + 1$  électeurs qui préfèrent  $C_*$  à  $D$ , ce qui constitue une majorité. □

# Second théorème de l'électeur médian

## Théorème

*Sous l'hypothèse de préférences décroisées, il y a un condorcier à l'élection.*

## Remarque

Le condorcier est donc le candidat préféré de l'électeur "du milieu" quand on range les électeurs de gauche à droite.

# Second théorème de l'électeur médian

## Théorème

*Sous l'hypothèse de préférences décroisées, il y a un condorcier à l'élection.*

## Exemple

Dans notre exemple de tout-à-l'heure, on avait l'ordonnancement suivant des électeurs, avec leurs préférences :

$e_1 : GR > GM > DM > DR ;$

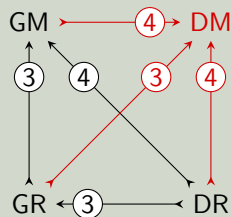
$e_2 : GR > DM > GM > DR ;$

$e_3 : DM > GM > GR > DR ;$

$e_4 : DM > GM > DR > GR ;$

$e_5 : DR > DM > GM > GR.$

D'après le théorème, c'est donc  $DM$  qui doit être le condorcier, ce qui est effectivement le cas :



# Plan

## 1 De la pertinence d'un nouveau mode de scrutin

## 2 Existence du vainqueur de Condorcet

- Situation générale
- Premier théorème de l'électeur médian
- Second théorème de l'électeur médian
- Troisième théorème de l'électeur médian

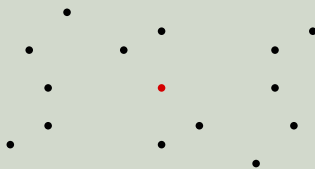
## 3 Aspects pratiques

# Hypothèse de symétrie

## Définition (Symétrie)

Supposons que l'idéal politique de chaque électeur puisse être représenté par un point de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , de même que les caractéristiques des différents candidats, les préférences de l'électeur allant du candidat le plus proche au candidat le plus éloigné. On dit qu'il y a *symétrie* si l'ensemble des idéaux des électeurs présente un centre de symétrie.

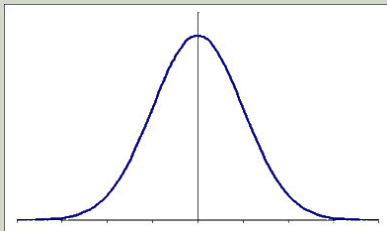
## Exemple



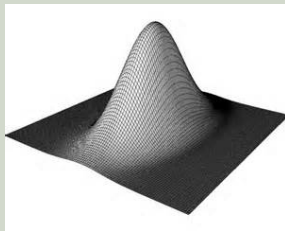
# Justification de l'hypothèse de symétrie

## Remarque

Lorsqu'il n'y a *pas de question essentielle clivante*, on peut supposer que le positionnement de chaque électeur est déterminé par la somme d'une multitude de petits facteurs indépendants, et alors les préférences des électeurs seront distribuées selon une **loi normale** (multidimensionnelle), laquelle est symétrique ; *si le nombre d'électeurs est suffisamment grand*, la distribution empirique de leurs préférence sera alors très proche de cette distribution normale, donc presque symétrique. L'hypothèse de symétrie est donc raisonnable dans un tel cas.



Loi normale en dimension 1.



Loi normale en dimension 2.

# Justification de l'hypothèse de symétrie

## Remarque

Lorsqu'il n'y a pas de question clivante et que le nombre d'électeurs est grand, l'hypothèse de symétrie est raisonnable.

## Exemple

Je détermine la position politique d'un électeur en lançant 1000 dés ; dés dont trois faces font faire 1 pas vers la droite, une faces fait faire 1 pas vers haut, et deux face laissent immobile.

# Justification de l'hypothèse de symétrie

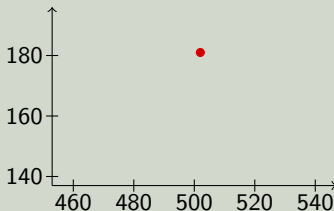
## Remarque

Lorsqu'il n'y a pas de question clivante et que le nombre d'électeurs est grand, l'hypothèse de symétrie est raisonnable.

## Exemple

Je détermine la position politique d'un électeur en lançant 1000 dés ; dès dont trois faces font faire 1 pas vers la droite, une faces fait faire 1 pas vers haut, et deux face laissent immobile. Par exemple,


 $\rightsquigarrow 502\rightarrow, 181\uparrow$



# Justification de l'hypothèse de symétrie

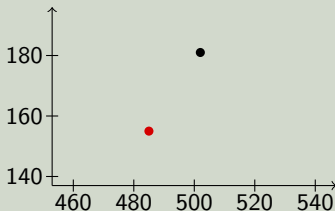
## Remarque

Lorsqu'il n'y a pas de question clivante et que le nombre d'électeurs est grand, l'hypothèse de symétrie est raisonnable.

## Exemple

Je détermine la position politique d'un électeur en lançant 1000 dés ; dès dont trois faces font faire 1 pas vers la droite, une faces fait faire 1 pas vers haut, et deux face laissent immobile. Par exemple,


 $\rightsquigarrow$  485 $\rightarrow$ , 155 $\uparrow$



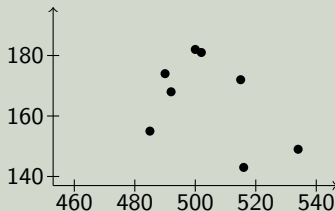
# Justification de l'hypothèse de symétrie

## Remarque

Lorsqu'il n'y a pas de question clivante et que le nombre d'électeurs est grand, l'hypothèse de symétrie est raisonnable.

## Exemple

Je détermine la position politique d'un électeur en lançant 1000 dés ; dès dont trois faces font faire 1 pas vers la droite, une faces fait faire 1 pas vers haut, et deux face laissent immobile.



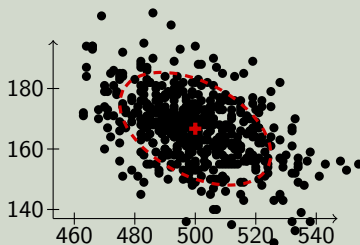
# Justification de l'hypothèse de symétrie

## Remarque

Lorsqu'il n'y a pas de question clivante et que le nombre d'électeurs est grand, l'hypothèse de symétrie est raisonnable.

## Exemple

Je détermine la position politique d'un électeur en lançant 1000 dés ; dés dont trois faces font faire 1 pas vers la droite, une faces fait faire 1 pas vers haut, et deux face laissent immobile.



# Troisième théorème de l'électeur médian

## Théorème

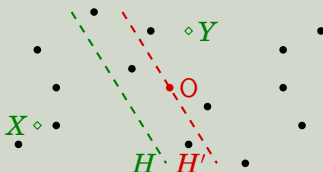
*Sous l'hypothèse de symétrie, il y a nécessairement un condorcier.*

# Troisième théorème de l'électeur médian

## Théorème

*Sous l'hypothèse de symétrie, il y a nécessairement un condorcier.*

## Démonstration.



Soient  $X$  et  $Y$  deux candidats. Le fait qu'un électeur préfère  $X$  ou  $Y$  dépend de quel côté il se trouve de leur hyperplan médiateur  $H$ . Soit  $O$  le centre de symétrie des électeurs, et disons par exemple que c'est  $Y$  qui est le plus proche de  $O$ . Alors pour être "côté  $Y$ " par rapport à  $H$ , il suffit de l'être par rapport à  $H'$ , où  $H'$  est le parallèle à  $H$  passant par  $O$ . Or par symétrie il y a la moitié des électeurs de chaque côté de  $H'$ . Il y a donc une majorité qui préfère  $Y$ ; et plus généralement le candidat le plus proche de  $O$  parmi tous sera préféré à tout autre.  $\square$

# Troisième théorème de l'électeur médian

## Théorème

*Sous l'hypothèse de symétrie, il y a nécessairement un condorcier.*

## Remarque

Le condorcier est donc celui des candidats qui est préféré par l'électeur dont les préférences sont situées au centre de symétrie.

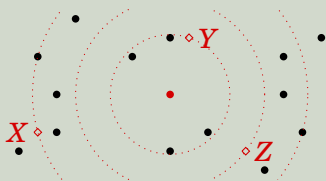
# Troisième théorème de l'électeur médian

## Théorème

*Sous l'hypothèse de symétrie, il y a nécessairement un condorcier.*

## Exemple

Avec 15 électeurs en dimension 2 :



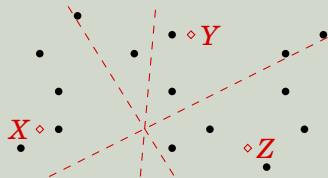
# Troisième théorème de l'électeur médian

## Théorème

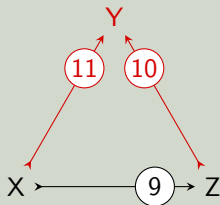
*Sous l'hypothèse de symétrie, il y a nécessairement un condorcier.*

## Exemple

Avec 15 électeurs en dimension 2 :



D'après le théorème, Y doit donc être condorcier, ce qui est effectivement le cas :



# Plan

- 1 De la pertinence d'un nouveau mode de scrutin
- 2 Existence du vainqueur de Condorcet
- 3 **Aspects pratiques**
  - Et quand il n'y a pas de condorcier ?
  - Vote stratégique
  - Scrutin et dépouillement
  - Le jugement majoritaire

# Plan

- 1 De la pertinence d'un nouveau mode de scrutin
- 2 Existence du vainqueur de Condorcet
- 3 Aspects pratiques**
  - Et quand il n'y a pas de condorcier ?
  - Vote stratégique
  - Scrutin et dépouillement
  - Le jugement majoritaire

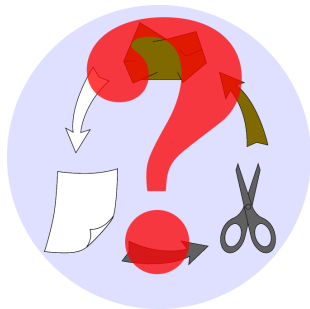
# Problématique

Même s'il existe de nombreuses conditions suffisantes assurant l'existence d'un condorcier, et même si en pratique il y en a presque toujours un (cf. sondages), il faut prévoir qui désigner vainqueur en l'absence de condorcier...



# Problématique

Même s'il existe de nombreuses conditions suffisantes assurant l'existence d'un condorcier, et même si en pratique il y en a presque toujours un (cf. sondages), il faut prévoir qui désigner vainqueur en l'absence de condorcier...

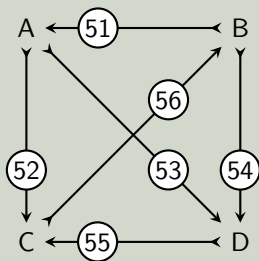


Il paraît logique d'exiger que la méthode générale de désignation du vainqueur redonne la méthode de Condorcet comme cas particulier : il ne serait pas très cohérent de changer complètement le mode de scrutin au motif qu'il n'y a pas de condorcier !

# Méthode minimax

Une première idée est de dire que, à défaut d'être celui qui *bat* tous les autres en duel, le vainqueur serait celui qui se comporte aussi bien que possible face à n'importe quel autre candidat, autrement dit celui dont le pire résultat est le meilleur. C'est ce qu'on appelle la **méthode minimax**.

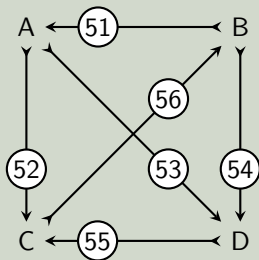
## Exemple



# Méthode minimax

Une première idée est de dire que, à défaut d'être celui qui *bat* tous les autres en duel, le vainqueur serait celui qui se comporte aussi bien que possible face à n'importe quel autre candidat, autrement dit celui dont le pire résultat est le meilleur. C'est ce qu'on appelle la **méthode minimax**.

## Exemple

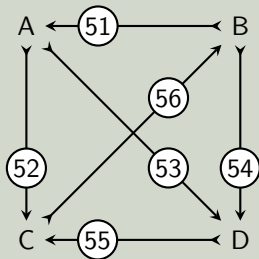


Candidat	Pire score
A	47 % (c. B)
B	46 % (c. D)
C	44 % (c. B)
D	45 % (c. C)

# Méthode minimax

Une première idée est de dire que, à défaut d'être celui qui *bat* tous les autres en duel, le vainqueur serait celui qui se comporte aussi bien que possible face à n'importe quel autre candidat, autrement dit celui dont le pire résultat est le meilleur. C'est ce qu'on appelle la **méthode minimax**.

## Exemple

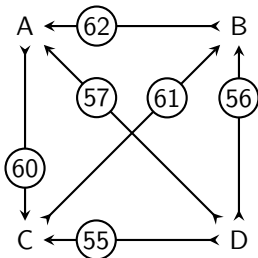


Candidat	Pire score
A	47 % (c. B)
B	46 % (c. D)
C	44 % (c. B)
D	45 % (c. C)

⇒ A est le vainqueur minimax.

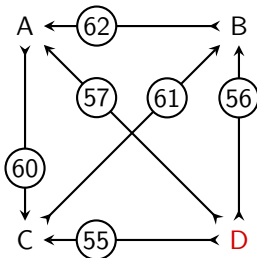
# Faiblesse de la méthode minimax

Considérons la situation suivante :



# Faiblesse de la méthode minimax

Considérons la situation suivante :



La vainqueur minimax est *D*, alors que celui-ci est battu en duel par n'importe quel autre candidat !! Cela semble aller contre la philosophie du critère de Condorcet... Ici, on a plutôt l'impression que les électeurs n'arrivent pas à se décider entre *A*, *B* et *C*, mais qu'en tout cas ils ne veulent pas de *D*...

# Méthode Schulze

- 1 La méthode Schulze [M. Schulze 1994] peut être considérée comme fondée sur l'idée de *révolutions* : on imagine qu'un candidat est au pouvoir, et que si un autre y est majoritairement préféré, il renverse celui en place.

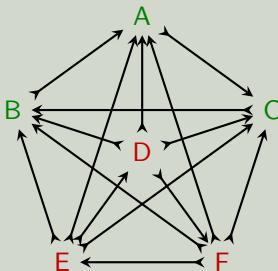
# Méthode Schulze

- 1 La méthode Schulze [M. Schulze 1994] peut être considérée comme fondée sur l'idée de *révolutions* : on imagine qu'un candidat est au pouvoir, et que si un autre y est majoritairement préféré, il renverse celui en place.
- 2 On peut distinguer deux types de candidats :
  - Ceux qui gardent une chance de revenir au pouvoir depuis n'importe quelle situation ;
  - Ceux qui peuvent se retrouver définitivement écartés suite à certaines révolutions.

# Méthode Schulze

- ② On peut distinguer deux types de candidats :
- Ceux qui gardent une chance de revenir au pouvoir depuis n'importe quelle situation ;
  - Ceux qui peuvent se retrouver définitivement écartés suite à certaines révolutions.

## Exemple



# Méthode Schulze

- 1 La méthode Schulze [M. Schulze 1994] peut être considérée comme fondée sur l'idée de *révolutions* : on imagine qu'un candidat est au pouvoir, et que si un autre y est majoritairement préféré, il renverse celui en place.
- 2 On peut distinguer deux types de candidats :
  - Ceux qui gardent une chance de revenir au pouvoir depuis n'importe quelle situation ;
  - Ceux qui peuvent se retrouver définitivement écartés suite à certaines révolutions.

On élimine alors les candidats définitivement écartés du pouvoir, s'il y en a.

# Méthode Schulze

- ① La méthode Schulze [M. Schulze 1994] peut être considérée comme fondée sur l'idée de *révolutions* : on imagine qu'un candidat est au pouvoir, et que si un autre y est majoritairement préféré, il renverse celui en place.
- ② On peut distinguer deux types de candidats :
  - Ceux qui gardent une chance de revenir au pouvoir depuis n'importe quelle situation ;
  - Ceux qui peuvent se retrouver définitivement écartés suite à certaines révolutions.

On élimine alors les candidats définitivement écartés du pouvoir, s'il y en a.
- ③ S'il ne reste alors plus qu'un maire potentiel, il est déclaré vainqueur par la méthode Schulze.

# Méthode Schulze

- 1 La méthode Schulze [M. Schulze 1994] peut être considérée comme fondée sur l'idée de *révolutions* : on imagine qu'un candidat est au pouvoir, et que si un autre y est majoritairement préféré, il renverse celui en place.
- 2 On peut distinguer deux types de candidats :
  - Ceux qui gardent une chance de revenir au pouvoir depuis n'importe quelle situation ;
  - Ceux qui peuvent se retrouver définitivement écartés suite à certaines révolutions.On élimine alors les candidats définitivement écartés du pouvoir, s'il y en a.
- 3 S'il ne reste alors plus qu'un maire potentiel, il est déclaré vainqueur par la méthode Schulze.

## Remarque

S'il y a un condorcier, l'algorithme s'arrête à ce moment-là. \* La méthode Schulze étend donc le critère de Condorcet.

\*. La condition est aussi nécessaire.

# Méthode Schulze

- ① La méthode Schulze [M. Schulze 1994] peut être considérée comme fondée sur l'idée de *révolutions* : on imagine qu'un candidat est au pouvoir, et que si un autre y est majoritairement préféré, il renverse celui en place.
- ② On peut distinguer deux types de candidats :
  - Ceux qui gardent une chance de revenir au pouvoir depuis n'importe quelle situation ;
  - Ceux qui peuvent se retrouver définitivement écartés suite à certaines révolutions.

On élimine alors les candidats définitivement écartés du pouvoir, s'il y en a.
- ③ **S'il ne reste alors plus qu'un maire potentiel, il est déclaré vainqueur par la méthode Schulze.**
- ④ S'il reste plusieurs maires potentiels, on augmente alors le "seuil" des révolutions : alors qu'au début il suffisait d'une majorité pour réussir la révolution, on augmente ce seuil à 51%, puis à 52%, ..., juste assez pour qu'une des révolutions précédemment permises devienne impossible.

# Méthode Schulze

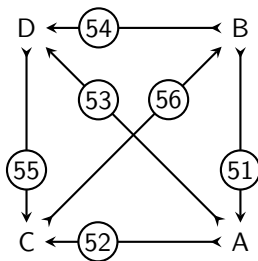
- ① La méthode Schulze [M. Schulze 1994] peut être considérée comme fondée sur l'idée de *révolutions* : on imagine qu'un candidat est au pouvoir, et que si un autre y est majoritairement préféré, il renverse celui en place.
- ② On peut distinguer deux types de candidats :
  - Ceux qui gardent une chance de revenir au pouvoir depuis n'importe quelle situation ;
  - Ceux qui peuvent se retrouver définitivement écartés suite à certaines révolutions.On élimine alors les candidats définitivement écartés du pouvoir, s'il y en a.
- ③ **S'il ne reste alors plus qu'un maire potentiel, il est déclaré vainqueur par la méthode Schulze.**
- ④ S'il reste plusieurs maires potentiels, on augmente alors le "seuil" des révolutions : alors qu'au début il suffisait d'une majorité pour réussir la révolution, on augmente ce seuil à 51%, puis à 52%, ..., juste assez pour qu'une des révolutions précédemment permises devienne impossible.
- ⑤ On reprend alors le cycle à l'étape 2, jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul maire potentiel.

# Méthode Schulze

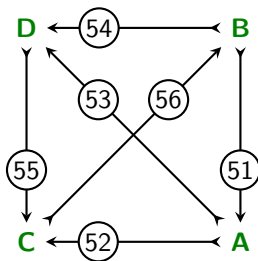
## Remarque

On peut aussi considérer un modèle *probabiliste* des révolutions, où le candidat au pouvoir peut être renversé selon un processus aléatoire (markovien). Dans ce modèle, aucun candidat n'est jamais définitivement éliminé et aucune révolution n'est complètement impossible ; par contre, néanmoins les révolutions deviennent beaucoup moins probables à mesure que le nombre d'opposants à ces révolutions croît. En faisant tendre cette notion de « beaucoup plus rares » vers l'infini, on obtient alors un modèle où, à l'équilibre thermodynamique, c'est presque toujours le même candidat qui est au pouvoir ; et le candidat en question est le vainqueur Schulze.

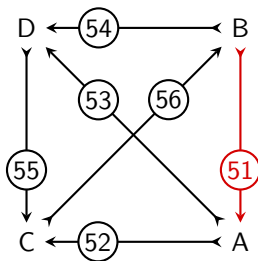
# Illustration de la méthode Schulze



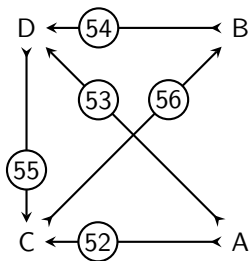
# Illustration de la méthode Schulze



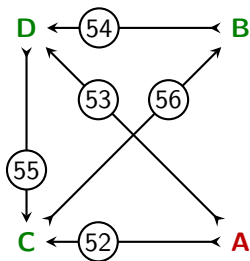
# Illustration de la méthode Schulze



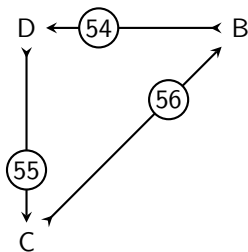
# Illustration de la méthode Schulze



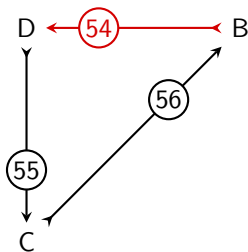
# Illustration de la méthode Schulze



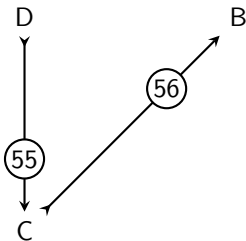
# Illustration de la méthode Schulze



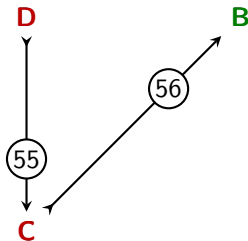
# Illustration de la méthode Schulze



# Illustration de la méthode Schulze



# Illustration de la méthode Schulze



# Illustration de la méthode Schulze

A red circle containing the letter B.

# Garantie de la méthode

## Théorème

*La méthode Schulze aboutit toujours : le nombre de candidats en lice finit toujours se réduire à 1, sans pouvoir devenir nul.*

# Garantie de la méthode

## Théorème

*La méthode Schulze aboutit toujours : le nombre de candidats en lice finit toujours se réduire à 1, sans pouvoir devenir nul.*

## Démonstration.

## Lemme

*Dans un diagramme de préférences binaires "complet" (chaque paire de candidat est reliée par une flèche), il y a au moins un candidat "vert".*

# Garantie de la méthode

## Théorème

*La méthode Schulze aboutit toujours : le nombre de candidats en lice finit toujours se réduire à 1, sans pouvoir devenir nul.*

## Démonstration.

## Lemme

*Dans un diagramme de préférences binaires "complet" (chaque paire de candidat est reliée par une flèche), il y a au moins un candidat "vert".*

## Lemme

*Partant d'un diagramme de préférence partiel où tous les candidats sont "verts", en retirant une flèche, il y a au moins un candidat "vert" dans le diagramme résultant.*

# Garantie de la méthode

## Théorème

*La méthode Schulze aboutit toujours : le nombre de candidats en lice finit toujours se réduire à 1, sans pouvoir devenir nul.*

## Démonstration.

### Lemme

*Dans un diagramme de préférences binaires "complet" (chaque paire de candidat est reliée par une flèche), il y a au moins un candidat "vert".*

### Lemme

*Partant d'un diagramme de préférence partiel où tous les candidats sont "verts", en retirant une flèche, il y a au moins un candidat "vert" dans le diagramme résultant.*

### Lemme

*Un diagramme sans aucune flèche ayant un candidat "vert" est nécessairement constitué d'un seul candidat.*

# Plan

- 1 De la pertinence d'un nouveau mode de scrutin
- 2 Existence du vainqueur de Condorcet
- 3 Aspects pratiques**
  - Et quand il n'y a pas de condorcier ?
  - **Vote stratégique**
  - Scrutin et dépouillement
  - Le jugement majoritaire

# Robustesse de la méthode Schulze

Nous avons dit qu'un des défauts des méthodes électorales "classiques" est d'inciter au *vote stratégique* où les électeurs n'expriment pas leurs préférences sincères. Le critère de Condorcet permet-il bien d'éviter ce phénomène ?

# Robustesse de la méthode Schulze

Nous avons dit qu'un des défauts des méthodes électorales "classiques" est d'inciter au *vote stratégique* où les électeurs n'expriment pas leurs préférences sincères. Le critère de Condorcet permet-il bien d'éviter ce phénomène ?

## Théorème

*Avec la méthode Schulze, s'il existe un ensemble d'électeurs "raisonnables" constituant une majorité, et que ces électeurs sont unanimes à placer collectivement un certain ensemble de "mauvais" candidats derrière tous les "bons" candidats, alors un mauvais candidat ne peut être élu.*

# Robustesse de la méthode Schulze

Nous avons dit qu'un des défauts des méthodes électorales "classiques" est d'inciter au *vote stratégique* où les électeurs n'expriment pas leurs préférences sincères. Le critère de Condorcet permet-il bien d'éviter ce phénomène ?

## Théorème

*Avec la méthode Schulze, s'il existe un ensemble d'électeurs "raisonnables" constituant une majorité, et que ces électeurs sont unanimes à placer collectivement un certain ensemble de "mauvais" candidats derrière tous les "bons" candidats, alors un mauvais candidat ne peut être élu.*

## Démonstration.

*En effet, il ne peut alors pas y avoir de révolution amenant d'un bon candidat vers un mauvais, et les mauvais candidats sont donc tous éliminés à la première itération de la méthode Schulze.*



# Robustesse de la méthode Schulze

## Remarque

Ce théorème n'est pas vrai avec la méthode minimax !

# Robustesse de la méthode Schulze

## Remarque

Ce théorème n'est pas vrai avec la méthode minimax !

## Contre-exemple

En effet, si un “mauvais” candidat a une très courte minorité (49 %) de supporteurs, et que les “bons” candidats sont au nombre de 3, les supporteurs du mauvais candidat peuvent utiliser l'exemple du paradoxe de Condorcet pour créer un cycle entre les trois bons candidats et rendre les pires résultats de chacun de ceux-ci inférieurs à 49 %.

# Vulnérabilité de la méthode Schulze

## Proposition

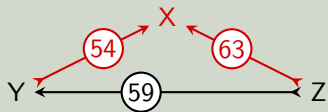
*Même avec la méthode Schulze, il existe des situations où un groupe d'électeurs peut "truquer" le résultat en sa faveur en exprimant des préférences non sincères.*

# Vulnérabilité de la méthode Schulze

## Exemple

Trois candidats en compétition : X, Y et Z.

- $X > Y > Z$  : 23 %
- $X > Z > Y$  : 19 %
- $Y > X > Z$  : 21 %
- $Y > Z > X$  : 15 %
- $Z > X > Y$  : 12 %
- $Z > Y > X$  : 10 %



⇒ X est élu.

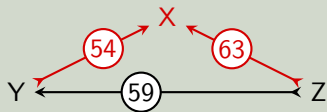
# Vulnérabilité de la méthode Schulze

## Exemple

Trois candidats en compétition : X, Y et Z.

- $X > Y > Z$  : 23 %
- $X > Z > Y$  : 19 %
- $Y > X > Z$  : 21 %
- $Y > Z > X$  : 15 %
- $Z > X > Y$  : 12 %
- $Z > Y > X$  : 10 %

- $X > Y > Z$  : 23 %
- $X > Z > Y$  : 19 %
- $Y > Z > X$  : 21 %
- $Y > Z > X$  : 15 %
- $Z > X > Y$  : 12 %
- $Z > Y > X$  : 10 %



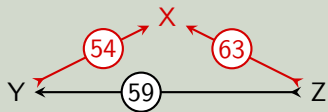
⇒ X est élu.

# Vulnérabilité de la méthode Schulze

## Exemple

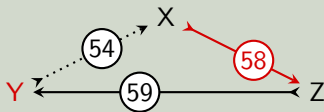
Trois candidats en compétition : X, Y et Z.

- $X > Y > Z$  : 23 %
- $X > Z > Y$  : 19 %
- $Y > X > Z$  : 21 %
- $Y > Z > X$  : 15 %
- $Z > X > Y$  : 12 %
- $Z > Y > X$  : 10 %



⇒ X est élu.

- $X > Y > Z$  : 23 %
- $X > Z > Y$  : 19 %
- $Y > Z > X$  : 21 %
- $Y > Z > X$  : 15 %
- $Z > X > Y$  : 12 %
- $Z > Y > X$  : 10 %



⇒ Y est élu.

# Un écueil inévitable !

## **Théorème (Gibbard & Satterthwaite 1973)**

*Quel que soit le système de scrutin utilisé qui désigne un vainqueur à partir des préférences des électeurs, dès lors qu'il y a au moins 3 candidats, il existe des situations où certains électeurs ont intérêt à mentir sur leurs préférences.*

# Un écueil inévitable !

## **Théorème (Gibbard & Satterthwaite 1973)**

*Quel que soit le système de scrutin utilisé qui désigne un vainqueur à partir des préférences des électeurs, dès lors qu'il y a au moins 3 candidats, il existe des situations où certains électeurs ont intérêt à mentir sur leurs préférences.*

## **Théorème (Gibbard 1977)**

*Si on autorise le système de scrutin à recourir à une forme de tirage au sort pour désigner la vainqueur, le seul système où aucun vote stratégique ne soit possible est celui de la « dictature aléatoire » : on tire un électeur au hasard et on prend pour vainqueur le candidat favori de cet électeur.*

# Un écueil inévitable !

## **Théorème (Gibbard & Satterthwaite 1973)**

*Quel que soit le système de scrutin utilisé qui désigne un vainqueur à partir des préférences des électeurs, dès lors qu'il y a au moins 3 candidats, il existe des situations où certains électeurs ont intérêt à mentir sur leurs préférences.*

Il est donc impossible d'éliminer totalement l'écueil du vote stratégique. Cependant, les méthodes de Condorcet semblent tout de même meilleures que les autres à ce point de vue : car on a des résultats de non-manipulabilité partielle qui sont déjà encourageants, et la plus grande cohérence des résultats (cf. première partie) devrait inciter les électeurs à voter fidèlement...

# Plan

- 1 De la pertinence d'un nouveau mode de scrutin
- 2 Existence du vainqueur de Condorcet
- 3 Aspects pratiques**
  - Et quand il n'y a pas de condorcier ?
  - Vote stratégique
  - Scrutin et dépouillement
  - Le jugement majoritaire

# Le bulletin de vote

Pour pouvoir procéder à une élection par la méthode de Condorcet, il faut que chaque électeur donne ses préférences entre chaque paire de candidats, autrement dit qu'il donne son classement des candidats. Pour  $n$  candidats, il y a donc  $n!$  bulletins possibles, soit 479 001 600 pour 12 candidats...

⇒ On ne peut donc pas imprimer tous les bulletins possibles : il faut un système où l'électeur remplit lui-même son bulletin.

<i>Nom de l'option</i>	<i>Class<sup>t</sup></i>
BIDULE	2 <sup>e</sup>
CHOSE	1 <sup>re</sup>
MACHIN	5 <sup>e</sup>
SCHMILBLICK	4 <sup>e</sup>
TRUC	3 <sup>e</sup>

# Le bulletin de vote

## DÉFI !

Si les ex-æquo sont autorisés, combien y a-t-il de classements possibles pour 12 candidats ?

# Le dépouillement

On n'a pas besoin de retenir la nature exacte des bulletins de l'urne, mais il faut connaître les résultats des confrontations entre chaque paire de candidats. Or pour  $n$  candidats, il y a  $n(n - 1)/2$  paires de candidats, et donc pour chaque bulletin il faut compter le résultat qu'il donne à chacune de ces confrontations...

⇒ Le dépouillement est plus long que dans les scrutins ordinaires : pour  $n$  candidats, le temps de dépouillement par bulletin est en  $O(n^2)$ , alors qu'il est en  $O(1)$  pour les scrutins habituels. \*

---

\*. Plus exactement en  $O(\log n)$ , car il faut une quantité d'information  $O(\log n)$  pour identifier un candidat parmi  $n$ .

# Le dépouillement

On n'a pas besoin de retenir la nature exacte des bulletins de l'urne, mais il faut connaître les résultats des confrontations entre chaque paire de candidats. Or pour  $n$  candidats, il y a  $n(n-1)/2$  paires de candidats, et donc pour chaque bulletin il faut compter le résultat qu'il donne à chacune de ces confrontations...

⇒ Le dépouillement est plus long que dans les scrutins ordinaires : pour  $n$  candidats, le temps de dépouillement par bulletin est en  $O(n^2)$ , alors qu'il est en  $O(1)$  pour les scrutins habituels. \*

## Remarque

On peut toutefois s'aider d'un ordinateur et ne procéder qu'à la partie de saisie des bulletins. Dans ce cas le temps de dépouillement par bulletin est seulement en  $O(n)$ . \*

\*. Ou plus exactement  $O(n \log n)$ , pour la même raison que précédemment.

\*. Plus exactement en  $O(\log n)$ , car il faut une quantité d'information  $O(\log n)$  pour identifier un candidat parmi  $n$ .

# Le dépouillement

On n'a pas besoin de retenir la nature exacte des bulletins de l'urne, mais il faut connaître les résultats des confrontations entre chaque paire de candidats. Or pour  $n$  candidats, il y a  $n(n-1)/2$  paires de candidats, et donc pour chaque bulletin il faut compter le résultat qu'il donne à chacune de ces confrontations...

⇒ Le dépouillement est plus long que dans les scrutins ordinaires : pour  $n$  candidats, le temps de dépouillement par bulletin est en  $O(n^2)$ , alors qu'il est en  $O(1)$  pour les scrutins habituels. \*

De même, la publication des résultats, qui avant occupait un volume de taille  $O(n)$  (il suffisait d'annoncer le score pour chaque candidat), va maintenant occuper un volume  $O(n^2)$  (il faut annoncer le score pour chaque paire de candidats).

---

\*. Plus exactement en  $O(\log n)$ , car il faut une quantité d'information  $O(\log n)$  pour identifier un candidat parmi  $n$ .

# Plan

- ① De la pertinence d'un nouveau mode de scrutin
- ② Existence du vainqueur de Condorcet
- ③ **Aspects pratiques**
  - Et quand il n'y a pas de condorcier ?
  - Vote stratégique
  - Scrutin et dépouillement
  - Le jugement majoritaire

# Condorcet et Notation

Mettre en pratique une méthode de Condorcet n'est pas évident, car le système de scrutin sera nécessairement un peu compliqué en pratique comme nous l'avons vu.

# Condorcet et Notation

Mettre en pratique une méthode de Condorcet n'est pas évident, car le système de scrutin sera nécessairement un peu compliqué en pratique comme nous l'avons vu.

Imaginons maintenant que, plutôt que de *choisir* entre les candidats, on les *note* par exemple sur 20.

# Condorcet et Notation

Mettre en pratique une méthode de Condorcet n'est pas évident, car le système de scrutin sera nécessairement un peu compliqué en pratique comme nous l'avons vu.

Imaginons maintenant que, plutôt que de *choisir* entre les candidats, on les *note* par exemple sur 20.

Les préférences d'un électeur entre les différentes notes possibles pour un candidat fixé ont nécessairement un profil en  $\Lambda$  !

# Condorcet et Notation

Mettre en pratique une méthode de Condorcet n'est pas évident, car le système de scrutin sera nécessairement un peu compliqué en pratique comme nous l'avons vu.

Imaginons maintenant que, plutôt que de *choisir* entre les candidats, on les *note* par exemple sur 20.

Les préférences d'un électeur entre les différentes notes possibles pour un candidat fixé ont nécessairement un profil en  $\Lambda$  !

⇒ D'après le premier théorème de l'électeur médian, choisir une note par le critère de Condorcet est donc simple : chaque électeur dit quelle est selon lui la note idéale ; on classe ces notes idéales dans l'ordre, et on retient la note médiane du classement.

# Condorcet et Notation

Mettre en pratique une méthode de Condorcet n'est pas évident, car le système de scrutin sera nécessairement un peu compliqué en pratique comme nous l'avons vu.

Imaginons maintenant que, plutôt que de *choisir* entre les candidats, on les *note* par exemple sur 20.

Les préférences d'un électeur entre les différentes notes possibles pour un candidat fixé ont nécessairement un profil en  $\Lambda$  !

⇒ D'après le premier théorème de l'électeur médian, choisir une note par le critère de Condorcet est donc simple : chaque électeur dit quelle est selon lui la note idéale ; on classe ces notes idéales dans l'ordre, et on retient la note médiane du classement.

## Définition (Jugement majoritaire, Balinski & Laraki 1996)

Le *scrutin par jugement majoritaire* consiste à demander à chaque électeur de noter chaque candidat, à regarder pour chaque candidat la note *médiane*, et à élire celui qui a la meilleure médiane.

# FIN



C'EST  
TOUT  
POUR  
AUJOURD'  
HUI.