Harmonie musicale, tempérament et mathématiques

par Rémi Peyre

Groupe de travail de l'équipe « Probabilités & Statistiques »

Nancy, 5 mars 2026

Des hauteurs aux notes

Observation : L'oreille humaine attribue un préordre total sur l'ensemble des sons musicaux : hauteur (haut $\leftrightarrow$ aigu ; bas $\leftrightarrow$ grave).

Des hauteurs aux notes

Observation : L'oreille humaine attribue un préordre total sur l'ensemble des sons musicaux : hauteur (haut $\leftrightarrow$ aigu ; bas $\leftrightarrow$ grave).

Observation : L'oreille attribue aussi une topologie sur les sons, avec laquelle la hauteur est compatible. Cette topologie est connexe par arcs (*glissando*) $\implies$ Ensemble des hauteurs homéomorphe à un intervalle réel.

Des hauteurs aux notes

Observation : L'oreille humaine attribue un préordre total sur l'ensemble des sons musicaux : hauteur (haut $\leftrightarrow$ aigu ; bas $\leftrightarrow$ grave).

Observation : L'oreille attribue aussi une topologie sur les sons, avec laquelle la hauteur est compatible. Cette topologie est connexe par arcs (*glissando*) $\implies$ Ensemble des hauteurs homéomorphe à un intervalle réel.

Observation : L'oreille attribue une action de groupe simplement transitive sur les hauteurs (« soit h'_1 la hauteur qui est à h_1 ce que h'_0 est à h_0 ») $\implies$ L'ensemble des hauteurs est un $\mathbb{R}$-espace affine. Différence de hauteurs $=:$ intervalle. Les intervalles forment un groupe additif isomorphe à $\mathbb{R}$.

Des hauteurs aux notes

Observation : L'oreille humaine attribue un préordre total sur l'ensemble des sons musicaux : hauteur (haut $\leftrightarrow$ aigu ; bas $\leftrightarrow$ grave).

Observation : L'oreille attribue aussi une topologie sur les sons, avec laquelle la hauteur est compatible. Cette topologie est connexe par arcs (*glissando*) $\Longrightarrow$ Ensemble des hauteurs homéomorphe à un intervalle réel.

Observation : L'oreille attribue une action de groupe simplement transitive sur les hauteurs (« soit h'_1 la hauteur qui est à h_1 ce que h'_0 est à h_0 ») $\Longrightarrow$ L'ensemble des hauteurs est un $\mathbb{R}$-espace affine. Différence de hauteurs $=:$ intervalle. Les intervalles forment un groupe additif isomorphe à $\mathbb{R}$.

Observation : Il y a un intervalle non nul remarquable tel que l'oreille trouve que deux sons de hauteurs séparées par celui-ci "sonnent" essentiellement pareil : « octave ». Unités : $\text{octave} / 12 =: \text{demiton}$; $\text{demiton} / 100 =: \text{centième}$ (¢).

Des hauteurs aux notes

Observation : L'oreille humaine attribue un préordre total sur l'ensemble des sons musicaux : hauteur (haut $\leftrightarrow$ aigu ; bas $\leftrightarrow$ grave).

Observation : L'oreille attribue aussi une topologie sur les sons, avec laquelle la hauteur est compatible. Cette topologie est connexe par arcs (*glissando*) $\implies$ Ensemble des hauteurs homéomorphe à un intervalle réel.

Observation : L'oreille attribue une action de groupe simplement transitive sur les hauteurs (« soit h'_1 la hauteur qui est à h_1 ce que h'_0 est à h_0 ») $\implies$ L'ensemble des hauteurs est un $\mathbb{R}$-espace affine. Différence de hauteurs =: intervalle. Les intervalles forment un groupe additif isomorphe à $\mathbb{R}$.

Observation : Il y a un intervalle non nul remarquable tel que l'oreille trouve que deux sons de hauteurs séparées par celui-ci "sonnent" essentiellement pareil : « octave ». Unités : $\text{octave}\,/\,12 =: \text{demiton}$; $\text{demiton}\,/\,100 =: \text{centième}\ (¢)$.

Définition : Une note est une hauteur vue à octaves près. L'ensemble des notes a donc la topologie métrique de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Tout est nombre !

Observation : Autre intervalle remarquable (« quinte »), valant de l'ordre de 7 demitons, tel que l'oreille trouve que deux sons séparés d'une quinte "sonnent bien" ensemble.

Tout est nombre !

Observation : Autre intervalle remarquable (« quinte »), valant de l'ordre de 7 demitons, tel que l'oreille trouve que deux sons séparés d'une quinte “sonnent bien” ensemble.

Découverte (Pythagore, ≈ -500) **:**

- L'octave est précisément le gain de hauteur obtenu quand on divise la longueur d'une corde tendue par 2 ;
- La quinte est le gain de hauteur obtenu quand on divise la longueur par $3/2$.

Tout est nombre !

Observation : Autre intervalle remarquable (« quinte »), valant de l'ordre de 7 demitons, tel que l'oreille trouve que deux sons séparés d'une quinte "sonnent bien" ensemble.

Découverte (Pythagore, ≈ -500) **:**

- L'octave est précisément le gain de hauteur obtenu quand on divise la longueur d'une corde tendue par 2 ;
- La quinte est le gain de hauteur obtenu quand on divise la longueur par $3/2$.

$\Longrightarrow$ Les intervalles correspondent à des logarithmes ; 1 octave $= \log 2$; 1 demiton $= \log 2^{1/12}$; 1 centième $= \log 2^{1/1200}$; 1 quinte $= \log(3/2)$.

Tout est nombre !

Observation : Autre intervalle remarquable (« quinte »), valant de l'ordre de 7 demitons, tel que l'oreille trouve que deux sons séparés d'une quinte "sonnent bien" ensemble.

Découverte (Pythagore, ≈ -500) **:**

- L'octave est précisément le gain de hauteur obtenu quand on divise la longueur d'une corde tendue par 2 ;
- La quinte est le gain de hauteur obtenu quand on divise la longueur par $3/2$.

$\Longrightarrow$ Les intervalles correspondent à des logarithmes ; $1 \text{ octave} = \log 2$; $1 \text{ demiton} = \log 2^{1/12}$; $1 \text{ centième} = \log 2^{1/1200}$; $1 \text{ quinte} = \log(3/2)$.

On définit aussi $1 \text{ quarte} \coloneqq 1 \text{ octave} - 1 \text{ quinte} = \log(4/3)$.

Gammes pythagoriciennes

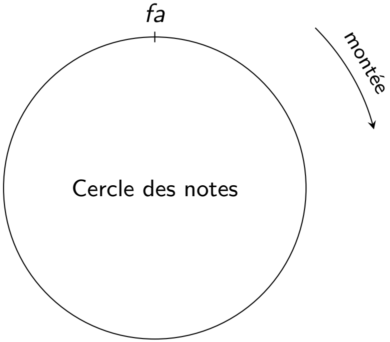
Voix ou violon : instruments à hauteurs libres (ensemble continu de hauteurs jouables). Flute ou harpe : seul un ensemble fixe de hauteurs sera jouable ! $\rightsquigarrow$ Choix d'un ensemble de notes (« gamme »).

Gammes pythagoriciennes

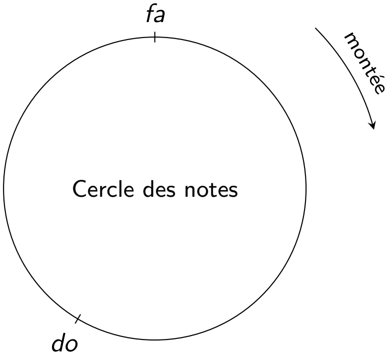
Voix ou violon : instruments à hauteurs libres (ensemble continu de hauteurs jouables). Flute ou harpe : seul un ensemble fixe de hauteurs sera jouable ! $\rightsquigarrow$ Choix d'un ensemble de notes (« gamme »).

Puisque la quinte est remarquablement consonante, choisissons des notes espacées de quintes successives !

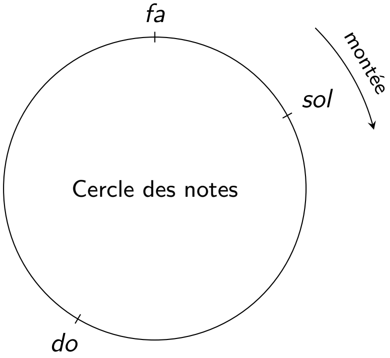
Gammes pythagoriciennes



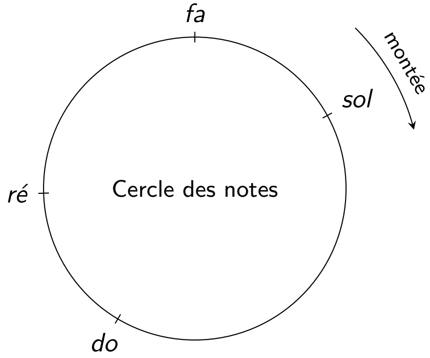
Gammes pythagoriciennes



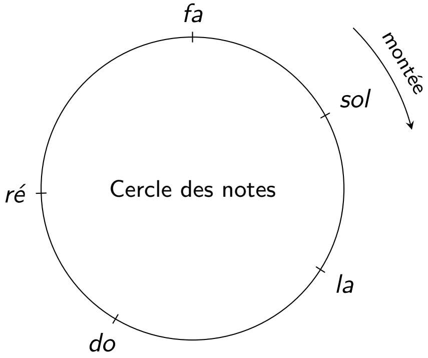
Gammes pythagoriciennes



Gammes pythagoriciennes

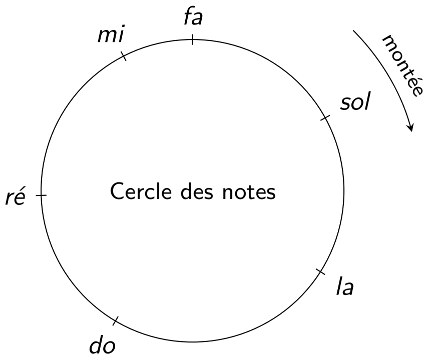


Gammes pythagoriciennes

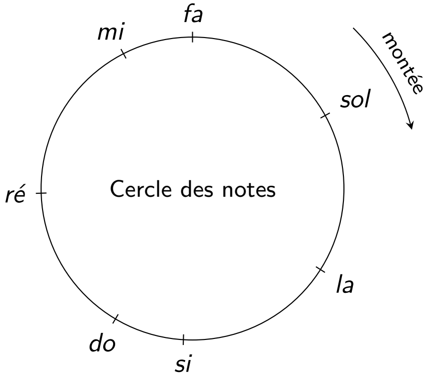


GAMME PENTATONIQUE
(très universelle)

Gammes pythagoriciennes



Gammes pythagoriciennes

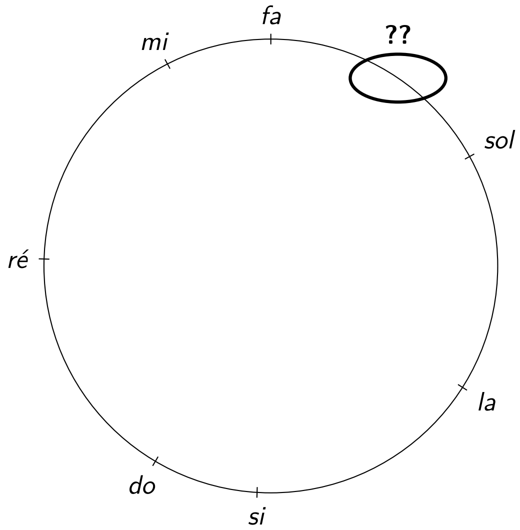


GAMME OCCIDENTALE

La question de la transposition

7 notes suffisent à écrire des mélodies assez riches. Mais souci de transposition : Si on veut “translater” *do–ré–mi* pour démarrer plutôt depuis *ré*, cela donne *ré–mi–* **??**

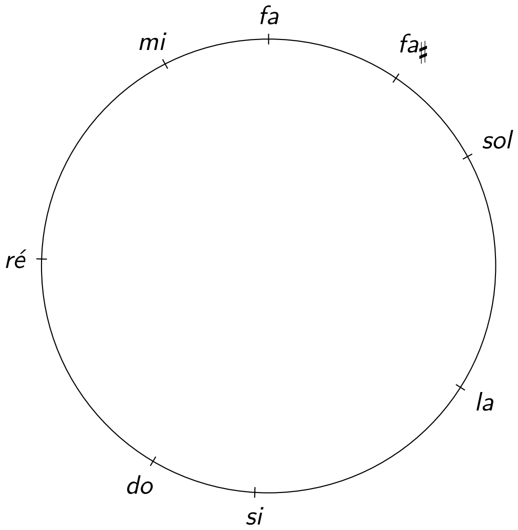
La question de la transposition



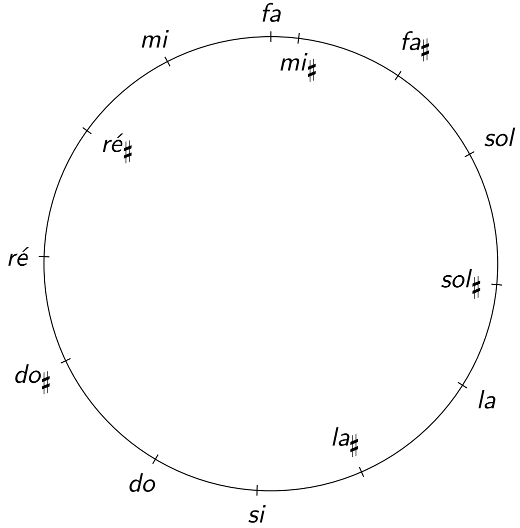
La question de la transposition

7 notes suffisent à écrire des mélodies assez riches. Mais souci de transposition : Si on veut “translater” *do–ré–mi* pour démarrer plutôt depuis *ré*, cela donne *ré–mi–* **??** $\rightsquigarrow$ Utilité de notes supplémentaires.

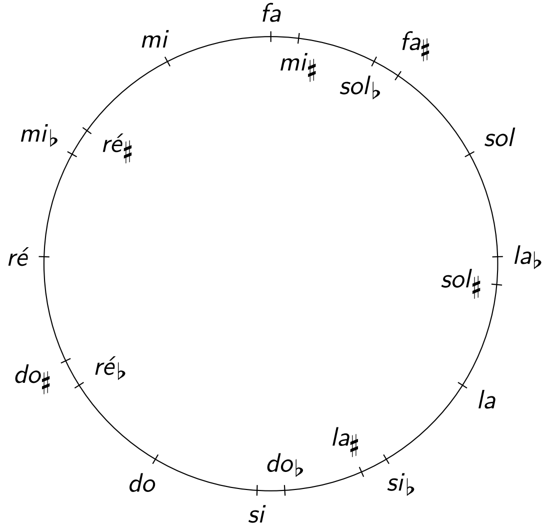
La question de la transposition



La question de la transposition



La question de la transposition

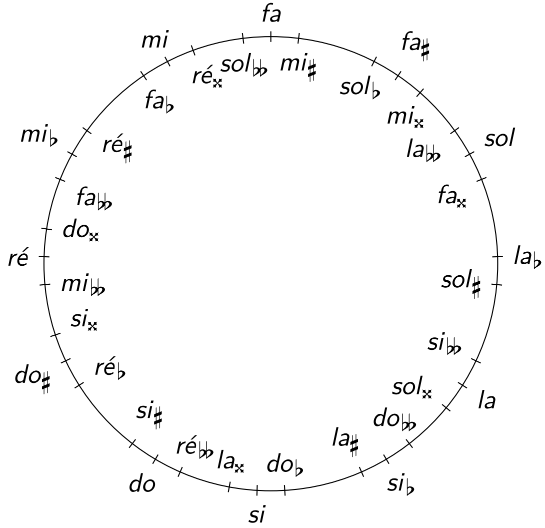


La question de la transposition

7 notes suffisent à écrire des mélodies assez riches. Mais souci de transposition : Si on veut "translater" *do–ré–mi* pour démarrer plutôt depuis *ré*, cela donne *ré–mi–* **??** $\rightsquigarrow$ Utilité de notes supplémentaires.

Et on pourrait continuer...

La question de la transposition



La question de la transposition

7 notes suffisent à écrire des mélodies assez riches. Mais souci de transposition : Si on veut “translater” *do–ré–mi* pour démarrer plutôt depuis *ré*, cela donne *ré–mi–***??** $\rightsquigarrow$ Utilité de notes supplémentaires.

Et on pourrait continuer...

Mais il faudra bien s’arrêter à un moment, car

Lemme : Un nombre entier de quintes ne permet jamais de retomber sur la même note.

Preuve : $\log(3/2) / \log(2) = \log(3) / \log(2) - 1$ est irrationnel, car si on avait $\log(3) / \log(2) = p/q$, on aurait $2^p = 3^q$, impossible par parité. $\square$

Notion de tempérament

Constat : 12 quintes sont vraiment proches de 7 octaves :

$$12\log(3/2) - 7\log 2 = \log\frac{531\,441}{524\,288} = 23{,}5\,¢ \quad (=: 1 \text{ comma}).$$

※.

Notion de tempérament

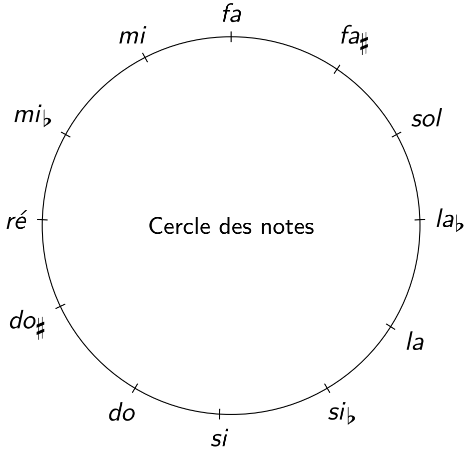
Constat : 12 quintes sont vraiment proches de 7 octaves :

$$12 \log(3/2) - 7 \log 2 = \log \frac{531\,441}{524\,288} = 23{,}5\,¢ \quad (=: 1 \text{ comma}).$$

Principe : Ne garder que douze notes et tolérer des quintes qui ne soient qu'approximativement correctes.

※.

Notion de tempérament



Notion de tempérament

Constat : 12 quintes sont vraiment proches de 7 octaves :

$$12\log(3/2) - 7\log 2 = \log\frac{531\,441}{524\,288} = 23{,}5\,¢ \quad (=: 1 \text{ comma}).$$

Principe : Ne garder que douze notes et tolérer des quintes qui ne soient qu'approximativement correctes.

Remarque : Autres valeurs envisageables si on veut moins ou plus de notes. P. ex., on améliore la taille du plus grand intervalle pour des gammes à **1**, **2**, **3**, **5**, **7**, **12**, **17**, **29**, **41**, **53**, **94**, … ※ notes : dénominateurs des semi-réduites de la fraction continue de $\log(3/2)\,/\,\log(2)$ [`oeis:A206788`], cf. théorie de l'approximation rationnelle.

※. En sombre : Dénominateurs des meilleures approximations rationnelles [`oeis:A060528`]. En noir : Dénominateurs des réduites [`oeis:A005664`].

Notion de tempérament

Constat : 12 quintes sont vraiment proches de 7 octaves :

$$12 \log(3/2) - 7 \log 2 = \log \frac{531\,441}{524\,288} = 23{,}5\,¢ \quad (=: 1 \text{ comma}).$$

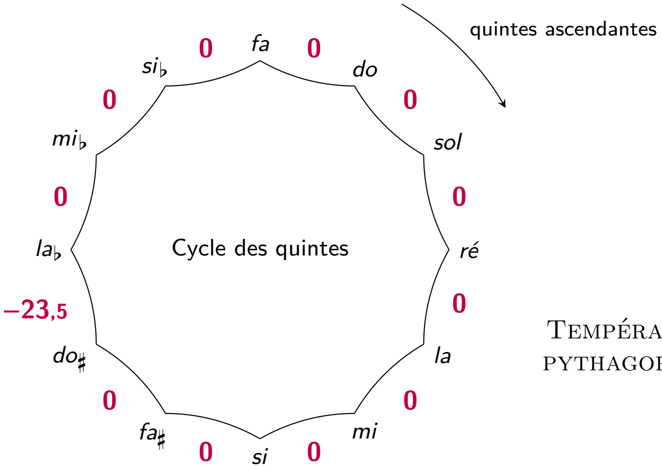
Principe : Ne garder que douze notes et tolérer des quintes qui ne soient qu'approximativement correctes.

Remarque : Autres valeurs envisageables si on veut moins ou plus de notes. P. ex., on améliore la taille du plus grand intervalle pour des gammes à **1**, **2**, **3**, **5**, **7**, **12**, **17**, **29**, **41**, **53**, **94**, ... ※ notes : dénominateurs des semi-réduites de la fraction continue de $\log(3/2) / \log(2)$ [`oeis:A206788`], cf. théorie de l'approximation rationnelle.

Définition : Tempérament : façon exacte de choisir les intervalles entre les douze notes. Représenté selon le cycle des quintes.

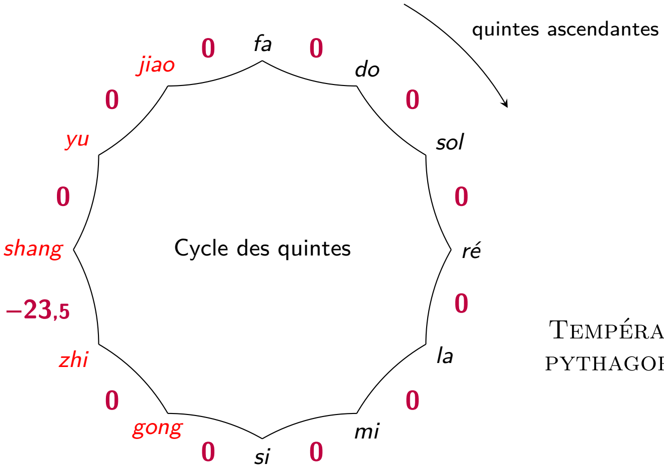
※. En sombre : Dénominateurs des meilleures approximations rationnelles [`oeis:A060528`]. En noir : Dénominateurs des réduites [`oeis:A005664`].

Notion de tempérament



TEMPÉRAMENT PYTHAGORICIEN

Notion de tempérament

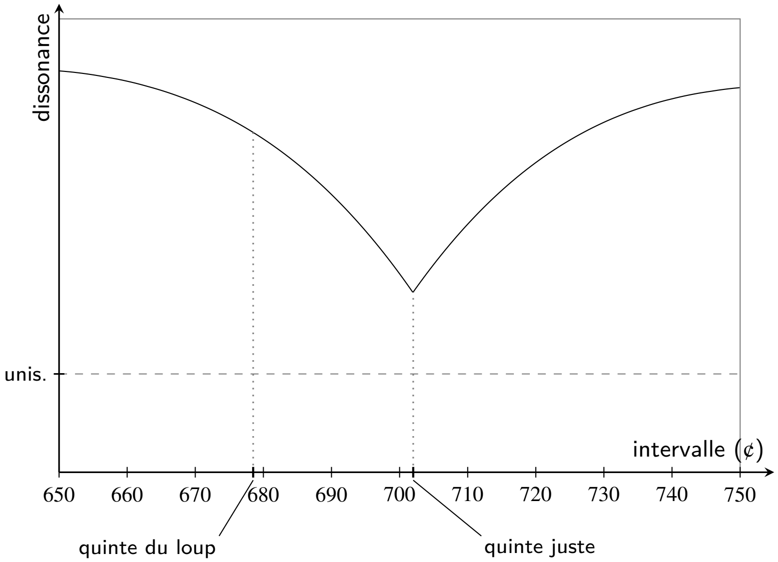


Tempérament pythagoricien

Tempéraments circulants

Problème : La quinte zhi–shang du tempérament pythagoricien sonne <u>très</u> mal !

Tempéraments circulants



Tempéraments circulants

Problème : La quinte zhi–shang du tempérament pythagoricien sonne très mal !

$\rightsquigarrow$ Le tempérament n'est pas « circulant » : Toutes les transpositions ne sont pas musicalement tolérables.

Tempéraments circulants

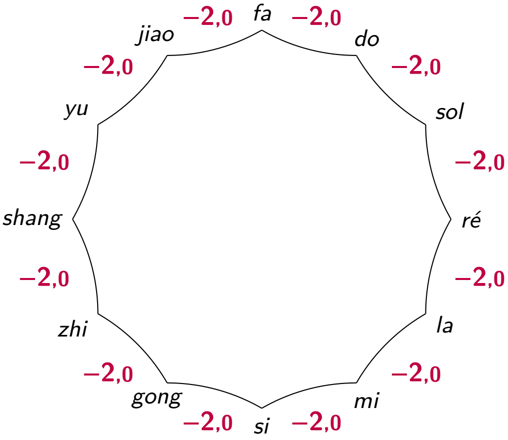
Problème : La quinte zhi–shang du tempérament pythagoricien sonne très mal !

$\rightsquigarrow$ Le tempérament n'est pas « circulant » : Toutes les transpositions ne sont pas musicalement tolérables.

Solution : Répartir le comma sur différentes quintes pour que toutes les quintes soient acceptables.

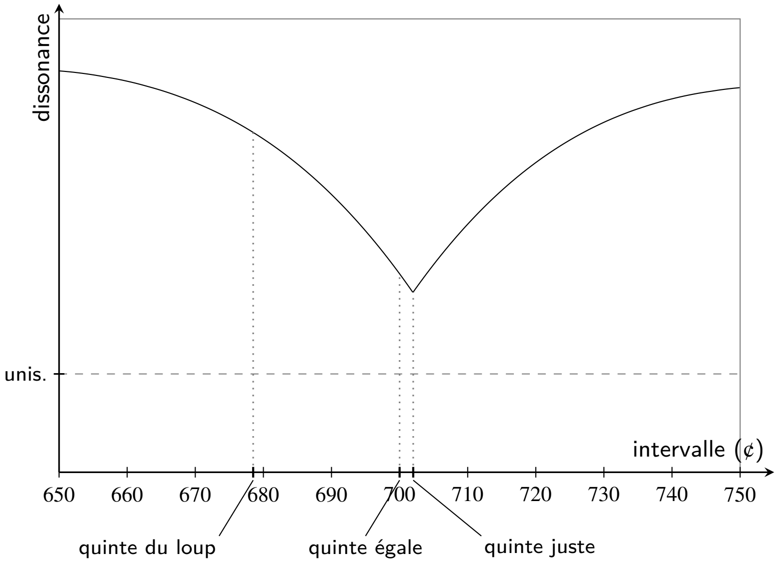
Exemple canonique : Tempérament égal, où toutes les quintes sont identiques [ultra-majoritaire depuis ∼1900].

Tempéraments circulants



Tempérament égal

Tempéraments circulants



Tempéraments circulants

Problème : La quinte zhi–shang du tempérament pythagoricien sonne très mal !

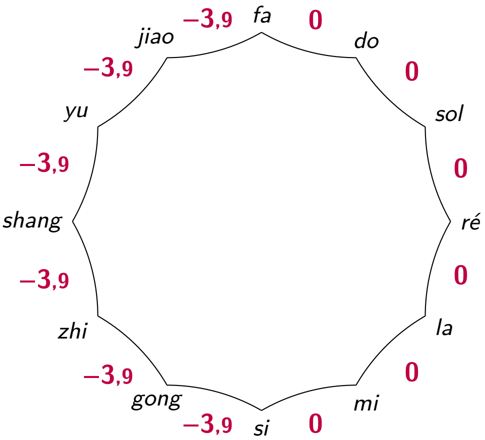
$\rightsquigarrow$ Le tempérament n'est pas « circulant » : Toutes les transpositions ne sont pas musicalement tolérables.

Solution : Répartir le comma sur différentes quintes pour que toutes les quintes soient acceptables.

Exemple canonique : Tempérament égal, où toutes les quintes sont identiques [ultra-majoritaire depuis ~1900].

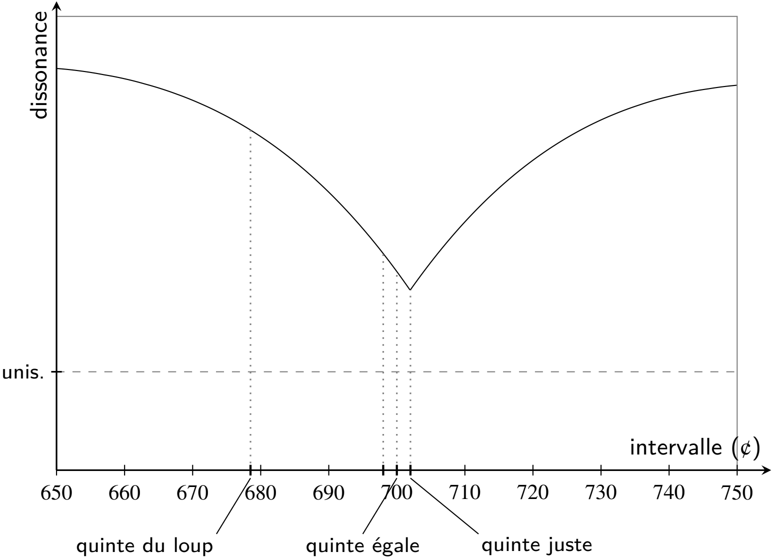
Autre possibilité : Tempérament inégal où on fait exprès que certaines quintes soient plus justes que d'autres $\rightsquigarrow$ "Couleur" différente selon la façon dont on transpose un morceau ! (« Tonalité »).

Tempéraments circulants

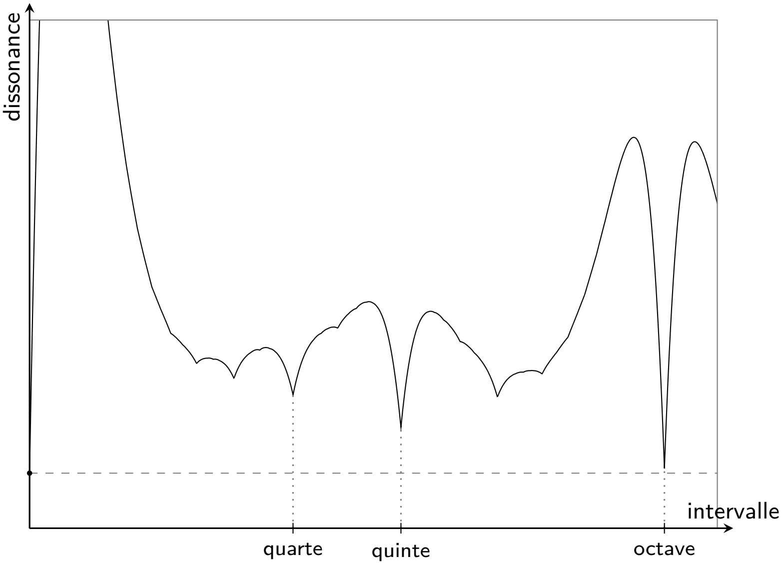


TEMPÉRAMENT
"PYTHO-CIRCULANT"

Tempéraments circulants



Physique de la dissonance



Physique de la dissonance

Pythagore (≈ -500) **:** La musique révèle une harmonie numérique cachée ; vision ésotérique...

Physique de la dissonance

Pythagore (≈ -500) **:** La musique révèle une harmonie numérique cachée ; vision ésotérique...

Mersenne (1637) **:** La hauteur d'un son correspond à la fréquence de vibration de l'onde sonore associée !

Physique de la dissonance

Pythagore (≈ -500) **:** La musique révèle une harmonie numérique cachée ; vision ésotérique...

Mersenne (1637) **:** La hauteur d'un son correspond à la fréquence de vibration de l'onde sonore associée !

du Verney (1683) **:** L'oreille identifie la hauteur d'un son grâce à des résonateurs de différentes fréquences.

Physique de la dissonance

Pythagore ($\approx$ –500) **:** La musique révèle une harmonie numérique cachée ; vision ésotérique...

Mersenne (1637) **:** La hauteur d'un son correspond à la fréquence de vibration de l'onde sonore associée !

du Verney (1683) **:** L'oreille identifie la hauteur d'un son grâce à des résonateurs de différentes fréquences.

Helmholtz (1863) **:** Les sons musicaux se décomposent en harmoniques (termes de la série de Fourier) ; spectre porté par les multiples de la fréquence fondamentale. La consonance correspond donc à la coïncidence partielle des spectres.

Physique de la dissonance

Pythagore (≈ -500) **:** La musique révèle une harmonie numérique cachée ; vision ésotérique...

Mersenne (1637) **:** La hauteur d'un son correspond à la fréquence de vibration de l'onde sonore associée !

du Verney (1683) **:** L'oreille identifie la hauteur d'un son grâce à des résonateurs de différentes fréquences.

Helmholtz (1863) **:** Les sons musicaux se décomposent en harmoniques (termes de la série de Fourier) ; spectre porté par les multiples de la fréquence fondamentale. La consonance correspond donc à la coïncidence partielle des spectres.

Mais pourquoi la coïncidence partielle des spectres est-elle agréable ?

Physique de la dissonance

Hypothèse : Phénomène de la fondamentale fantôme : Si f et f' sont dans un ratio simple,

$$(\mathbb{N} \cdot f) \cup (\mathbb{N} \cdot f') \approx \mathbb{N} \cdot \gcd(f, f').$$

De telles fréquences seraient consonantes car leur spectre combiné ressemble à un quelque chose à quoi on est habitué...

Physique de la dissonance

Hypothèse : Phénomène de la fondamentale fantôme : Si f et f' sont dans un ratio simple,

$$(\mathbb{N} \cdot f) \cup (\mathbb{N} \cdot f') \approx \mathbb{N} \cdot \gcd(f, f').$$

De telles fréquences seraient consonantes car leur spectre combiné ressemble à un quelque chose à quoi on est habitué...

✗ Explique la consonance, mais pas la dissonance...

Physique de la dissonance

Hypothèse : Phénomène de la fondamentale fantôme : Si f et f' sont dans un ratio simple,

$$(\mathbb{N} \cdot f) \cup (\mathbb{N} \cdot f') \approx \mathbb{N} \cdot \mathrm{gcd}(f, f').$$

De telles fréquences seraient consonantes car leur spectre combiné ressemble à un quelque chose à quoi on est habitué...

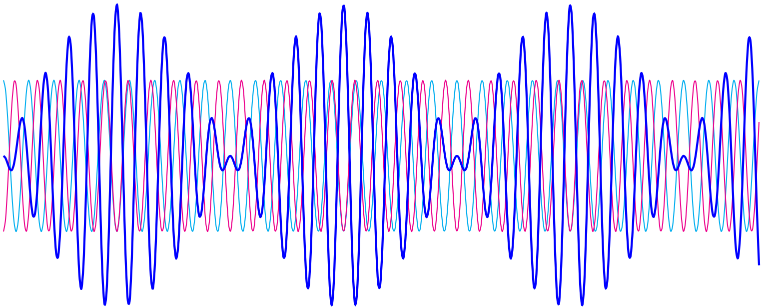
✗ Explique la consonance, mais pas la dissonance...

✗ Les cloches ont des spectres discrets ne suivant pas le motif « multiples de la fondamentale » ; pourtant elles sont plutôt harmonieuses !

Physique de la dissonance

Hypothèse : Phénomène de battements :

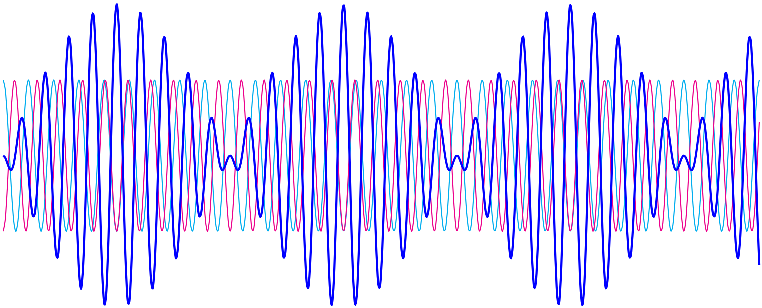
$$\cos(\omega t) + \cos(\omega' t) = 2\cos\left(\frac{\omega' - \omega}{2} t\right)\cos\left(\frac{\omega' + \omega}{2} t\right)$$



Physique de la dissonance

Hypothèse : Phénomène de battements :

$$\cos(\omega t) + \cos(\omega' t) = 2\cos\left(\frac{\omega' - \omega}{2} t\right)\cos\left(\frac{\omega' + \omega}{2} t\right)$$

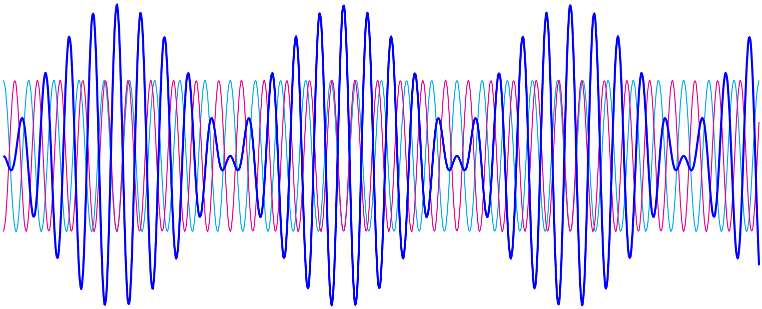


La sensation désagréable viendrait de battements de l'ordre de $20\ \mathrm{Hz}$...

Physique de la dissonance

Hypothèse : Phénomène de battements :

$$\cos(\omega t) + \cos(\omega' t) = 2\cos\left(\frac{\omega' - \omega}{2} t\right)\cos\left(\frac{\omega' + \omega}{2} t\right)$$



La sensation désagréable viendrait de battements de l'ordre de $20\ \mathrm{Hz}$...

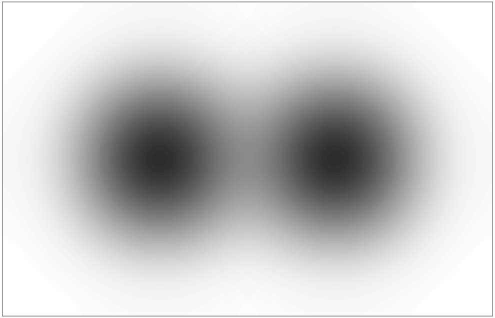
✗ Peu compatible avec le comportement en fréquences.

Physique de la dissonance

Hypothèse : Le cerveau n'aime pas l'ambigüité pour traiter le spectre de fréquences lorsque deux fréquences sont proches-mais-pas-trop.

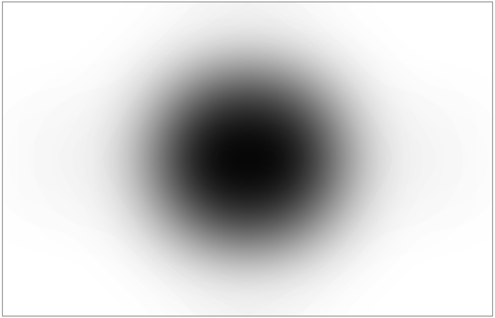
Physique de la dissonance

Hypothèse : Le cerveau n'aime pas l'ambigüité pour traiter le spectre de fréquences lorsque deux fréquences sont proches-mais-pas-trop.



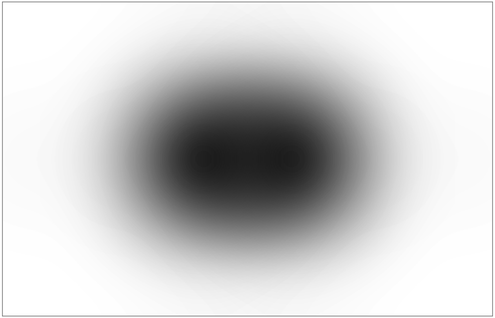
Physique de la dissonance

Hypothèse : Le cerveau n'aime pas l'ambigüité pour traiter le spectre de fréquences lorsque deux fréquences sont proches-mais-pas-trop.



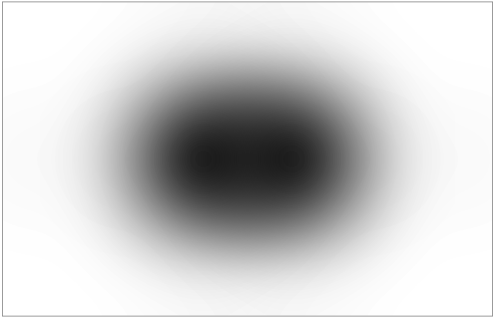
Physique de la dissonance

Hypothèse : Le cerveau n'aime pas l'ambigüité pour traiter le spectre de fréquences lorsque deux fréquences sont proches-mais-pas-trop.



Physique de la dissonance

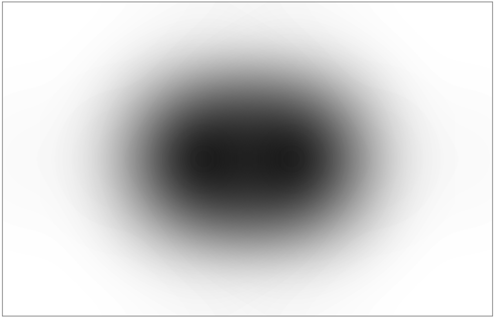
Hypothèse : Le cerveau n'aime pas l'ambigüité pour traiter le spectre de fréquences lorsque deux fréquences sont proches-mais-pas-trop.



✓ Plomp & Levelt (1965) ont montré, expériences à l'appui, que c'est bien l'effet dominant pour expliquer la dissonance.

Physique de la dissonance

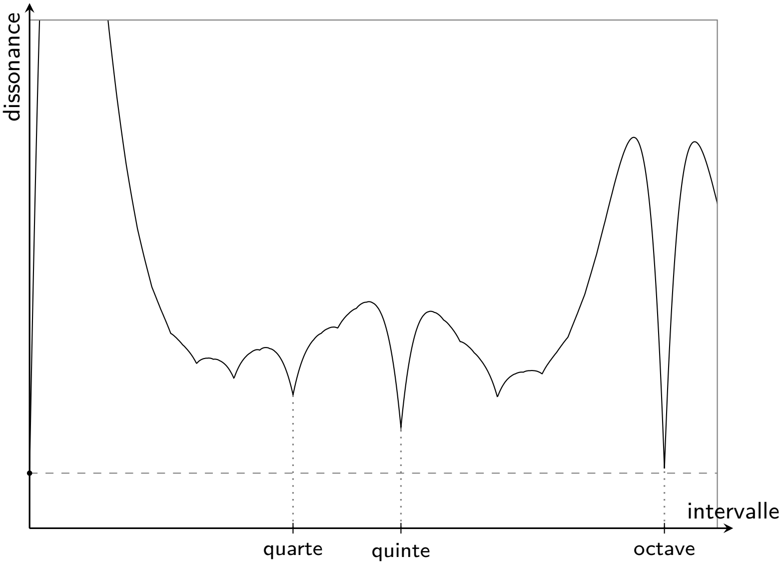
Hypothèse : Le cerveau n'aime pas l'ambigüité pour traiter le spectre de fréquences lorsque deux fréquences sont proches-mais-pas-trop.



✓ Plomp & Levelt (1965) ont montré, expériences à l'appui, que c'est bien l'effet dominant pour expliquer la dissonance.

La courbe que j'ai montrée est une formalisation mathématique de cette approche.

Physique de la dissonance



La question des tierces

Musique harmonique ($\neq$ mélodique) : jouer simultanément des notes qui sonnent bien ensemble : « accords ».

La question des tierces

Musique harmonique ($\neq$ mélodique) : jouer simultanément des notes qui sonnent bien ensemble : « accords ».

Mais juste quarte, quinte et octave, c'est trop "pauvre" : il faut une note supplémentaire qui va "colorer" l'accord.

La question des tierces

Musique harmonique ($\neq$ mélodique) : jouer simultanément des notes qui sonnent bien ensemble : « accords ».

Mais juste quarte, quinte et octave, c'est trop "pauvre" : il faut une note supplémentaire qui va "colorer" l'accord.

Ce rôle est le plus souvent joué par les tierces (majeures).

$$\begin{aligned} \mathrm{tierce} &\coloneqq \log(5/4) \\ \mathrm{tierce}^8 &\coloneqq \mathrm{tierce} + \mathrm{octave} = \log(5/2) \\ \mathrm{sixte} &\coloneqq \mathrm{quarte} + \mathrm{tierce} = \log(5/3) = \mathrm{tierce}^8 - \mathrm{quinte} \end{aligned}$$

Un accord de fréquences en $3 : 4 : 5$ est particulièrement consonant (« accord de tierce majeure »).

La question des tierces

Musique harmonique ($\neq$ mélodique) : jouer simultanément des notes qui sonnent bien ensemble : « accords ».

Mais juste quarte, quinte et octave, c'est trop "pauvre" : il faut une note supplémentaire qui va "colorer" l'accord.

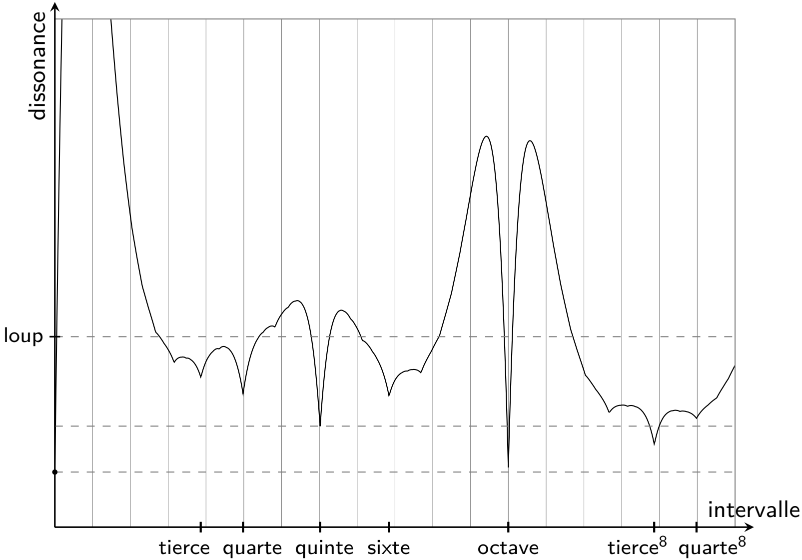
Ce rôle est le plus souvent joué par les tierces (majeures).

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tierce} &\coloneqq \log(5/4) \\
\mathrm{tierce}^8 &\coloneqq \mathrm{tierce} + \mathrm{octave} = \log(5/2) \\
\mathrm{sixte} &\coloneqq \mathrm{quarte} + \mathrm{tierce} = \log(5/3) = \mathrm{tierce}^8 - \mathrm{quinte}
\end{aligned}
$$

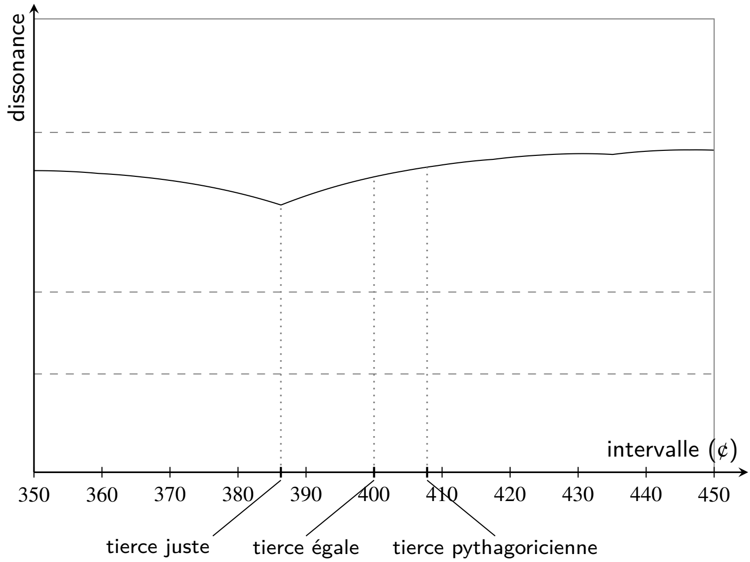
Un accord de fréquences en $3 : 4 : 5$ est particulièrement consonant (« accord de tierce majeure »).

La tierce n'est pas un intervalle du tempérament égal, mais n'en est pas si loin...

La question des tierces



La question des tierces



Tempérament mésotonique

Idée : $4 \equiv 7+7+7+7 \pmod{12} \implies$ En réduisant les quintes de ε, on réduit les tierces de $4\varepsilon \rightsquigarrow$ On peut obtenir des tierces justes avec des quintes quasi intactes !

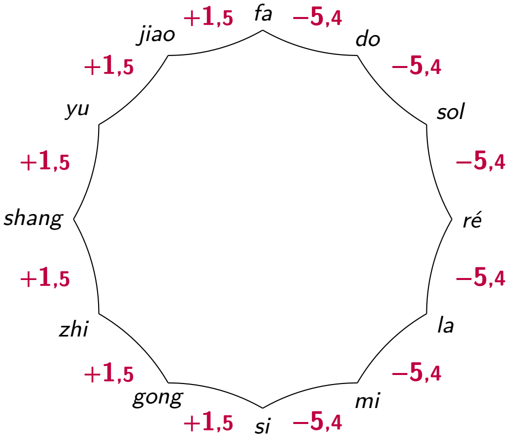
Tempérament mésotonique

Idée : $4 \equiv 7+7+7+7 \pmod{12} \implies$ En réduisant les quintes de ε, on réduit les tierces de $4\varepsilon \rightsquigarrow$ On peut obtenir des tierces justes avec des quintes quasi intactes !

Au XVIII^{e} siècle, idée de « bon tempérament » :

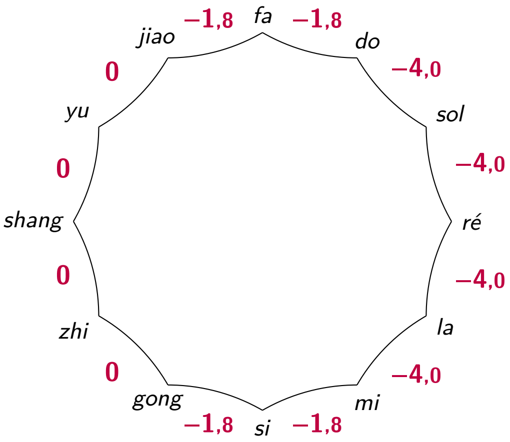
- Sur les notes « blanches » [*do*, *ré*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*], les tierces, quartes, quintes et sixtes sont toutes presque pures ;
- Mais toutes les transpositions restent acceptables (avec des “couleurs” différentes).

Tempérament mésotonique



Tempérament mésotonique (circulant)

Tempérament mésotonique

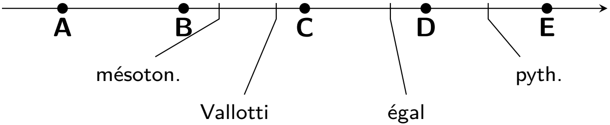


TEMPÉRAMENT DE YOUNG

Mais en vrai... !?

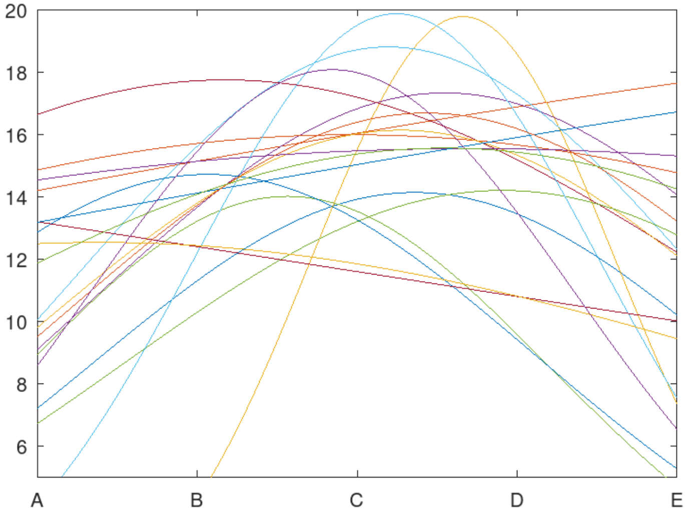
Expérience :

- Prélude BWV 846 de J.-S. Bach (1722), privilégiant les notes blanches.
- Tempéraments avec deux types de quintes : Quintes « blanches » *fa – do – sol – ré – la – mi – si* vs Quintes « noires » *si – gong – zhi – shang – yu – jiao – fa*.
- Cinq tempéraments proposés, avec une progression régulière.

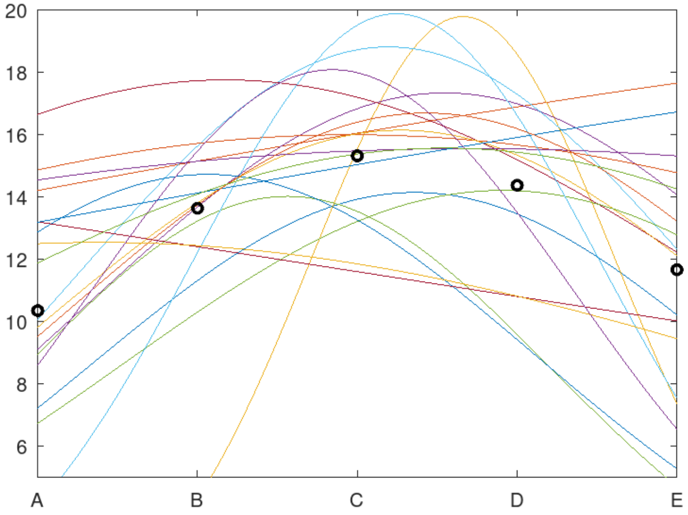


- Les participants notent chaque tempérament, à l'aveugle.

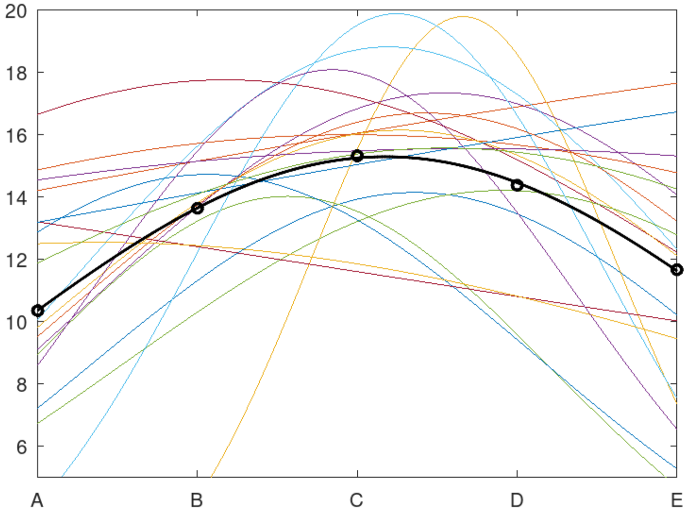
Résultats de l'expérience



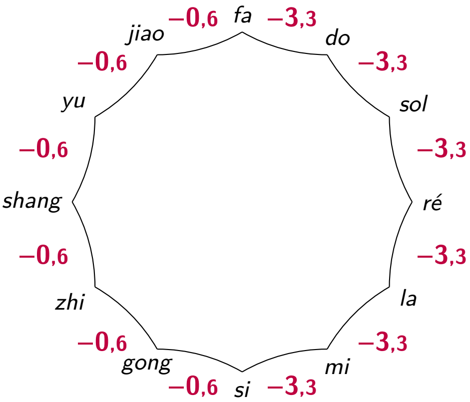
Résultats de l'expérience



Résultats de l'expérience



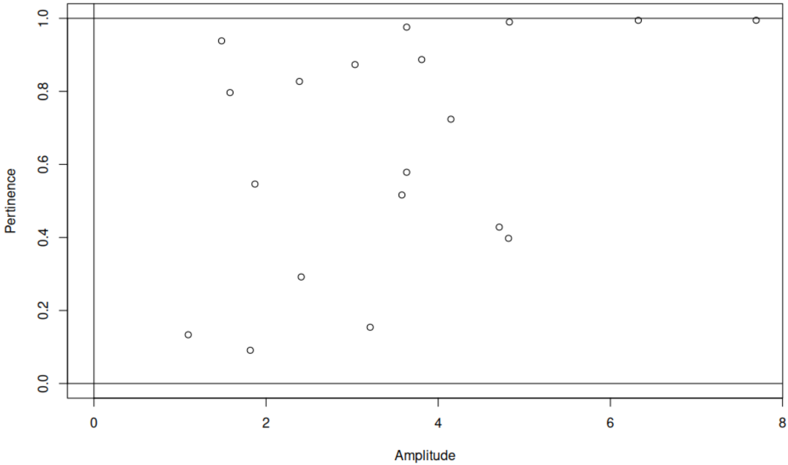
Tempérament optimal selon les cobayes



- Plus proche de l'égal que du mésotonique...
- Mais penchant nettement vers des quintes blanches plus petites que les noires !

Hétérogénéité des cobayes

La sensibilité de l'oreille des cobayes est très variable... Mais les moins sensibles sont conscients de leurs limites !



Et Bach, dans tout ça ?!

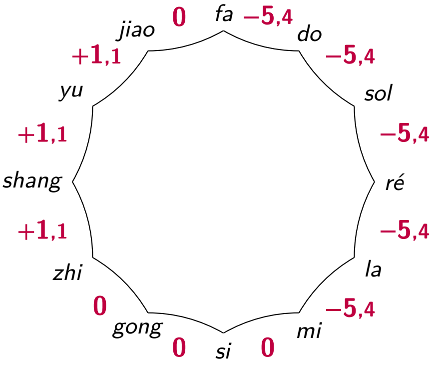
Jean-Sébastien Bach :

- La référence ultime en musique baroque.
- Parmi les premiers à utiliser des tempéraments circulants.
- Consensus des historiens : Ce n'était pas un tempérament égal.
- Comment Bach accordait-il son clavecin ? (Il n'a pas jugé utile de l'écrire explicitement...).

Et Bach, dans tout ça ?!

Jean-Sébastien Bach :

- La référence ultime en musique baroque.
- Parmi les premiers à utiliser des tempéraments circulants.
- Consensus des historiens : Ce n'était pas un tempérament égal.
- Comment Bach accordait-il son clavecin ? (Il n'a pas jugé utile de l'écrire explicitement...).



Tempérament de Bach ?
(hypothèse de Jobin)

Le Clavier Bien Tempéré

- Recueil destiné « au bénéfice et à l'usage des jeunes musiciens désireux d'apprendre, comme de ceux déjà habiles en leur art ».
- 96 morceaux en tout :
  - Préludes ou fugues ;
  - Tonalité majeure ou mineure ※ ;
  - Un exemple pour chaque transposition de la gamme de base (« armure »).
  - Deux cahiers (composés à 22 ans d'intervalle).

※. Confer l'accord central autour duquel est construit le morceau : *do–mi–sol* en majeur, resp. *la–do–mi* en mineur.

Le Clavier Bien Tempéré

- Recueil destiné « au bénéfice et à l'usage des jeunes musiciens désireux d'apprendre, comme de ceux déjà habiles en leur art ».
- 96 morceaux en tout :
  - Préludes ou fugues ;
  - Tonalité majeure ou mineure [※] ;
  - Un exemple pour chaque transposition de la gamme de base (« armure »).
  - Deux cahiers (composés à 22 ans d'intervalle).

Hypothèse : Puisque les différentes armures sonnaient différemment, Bach n'aurait pas privilégié les mêmes accords selon le cas $\rightsquigarrow$ Les partitions nous donnent un indice rétrospectif sur le tempérament utilisé (Barnes 1979).

※. Confer l'accord central autour duquel est construit le morceau : *do–mi–sol* en majeur, resp. *la–do–mi* en mineur.

Le Clavier Bien Tempéré

- Recueil destiné « au bénéfice et à l'usage des jeunes musiciens désireux d'apprendre, comme de ceux déjà habiles en leur art ».
- 96 morceaux en tout :
  - Préludes ou fugues ;
  - Tonalité majeure ou mineure [※] ;
  - Un exemple pour chaque transposition de la gamme de base (« armure »).
  - Deux cahiers (composés à 22 ans d'intervalle).

Hypothèse : Puisque les différentes armures sonnaient différemment, Bach n'aurait pas privilégié les mêmes accords selon le cas $\rightsquigarrow$ Les partitions nous donnent un indice rétrospectif sur le tempérament utilisé (Barnes 1979).

Mon projet : Pousser plus loin l'idée de Barnes :

- Puissance de l'outil informatique ;
- Inférence statistique pour obtenir des intervalles de confiance.

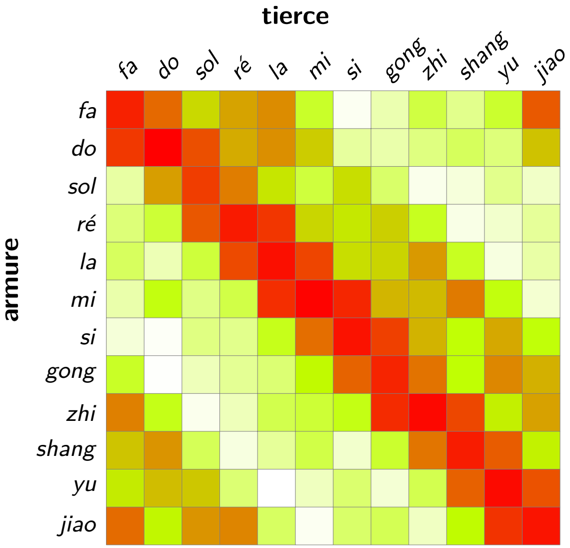
※. Confer l'accord central autour duquel est construit le morceau : *do–mi–sol* en majeur, resp. *la–do–mi* en mineur.

Méthodologie

- Utilisation de fichiers MIDI ※ ;
- Pour chaque tierce majeure (*do*–*mi*, *zhi*–*fa*, *ré*–*gong*, etc.), on regarde à quelle fréquence il arrive qu'elle soit jouée.

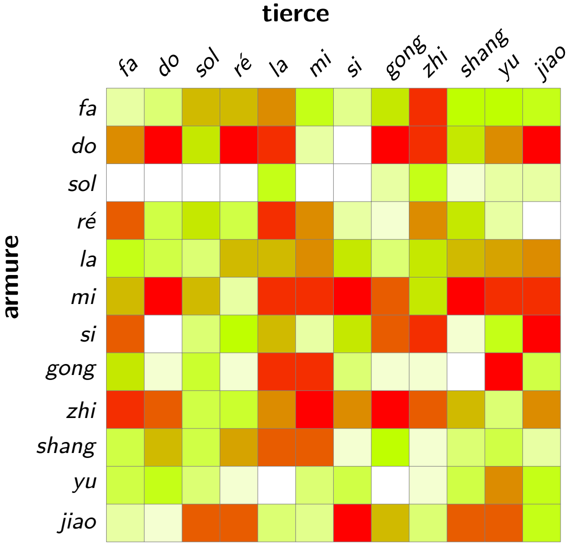
※. Merci au Pr Yo Tomita, de Belfast ◡̈

Premiers résultats de l'analyse



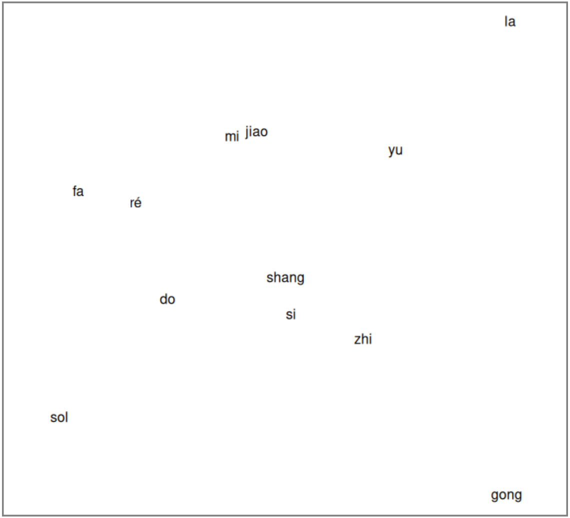
Prééminence des différentes tierces, par armure

Premiers résultats de l'analyse



Prééminence des tierces au vu de la position dans la gamme

Premiers résultats de l'analyse



Prééminence des tierces dans le second cahier (ordonnées) v^s dans le premier cahier (abscisses)

Cela contredit Barnes...!

Cela contredit Barnes...!

- Erreur dans mon code ?

Cela contredit Barnes...!

- Erreur dans mon code ?
- Hétérogénéité des fichiers MIDI utilisés ?

Cela contredit Barnes...!

- Erreur dans mon code ?
- Hétérogénéité des fichiers MIDI utilisés ?
- Mauvais critère considéré ?

Cela contredit Barnes...!

- Erreur dans mon code ?
- Hétérogénéité des fichiers MIDI utilisés ?
- Mauvais critère considéré ?
- Barnes aurait menti ?!

Cela contredit Barnes...!

- Erreur dans mon code ?
- Hétérogénéité des fichiers MIDI utilisés ?
- Mauvais critère considéré ?
- Barnes aurait menti ?!
- Barnes aurait été influencé par ce à quoi il s'attendait ?...

Cela contredit Barnes...!

- Erreur dans mon code ?
- Hétérogénéité des fichiers MIDI utilisés ?
- Mauvais critère considéré ?
- Barnes aurait menti ?!
- Barnes aurait été influencé par ce à quoi il s'attendait ?...

À creuser...

FIN

C'EST TOUT POUR AUJOURD'HUI.

Trois chouettes références

- https://www.youtube.com/watch?v=tCsl6ZcY9ag, par Henry Reich : Vidéo présentant la théorie de la dissonance de façon très pédagogique, avec des expériences en direct pour l'auditeur !
- *Music – A Mathematical Offering*, par David J. Benson : Livre couvrant de très nombreux aspects des liens entre mathématiques et musique, riche en contenu scientifique et fort agréable à lire.
- *La Quinte Juste* [*Kaamelott*, livre II ép. 55] : Sketch comique inspiré de l'évolution historique de la musique occidentale (transition de l'approche mélodique à l'approche harmonique).