



Des
mathématiques
pour
améliorer
la
démocratie

par Rémi Peyre,
chercheur en mathématiques à l'Université de Vienne (Autriche)

Condorcet, la démocratie et les lumières



Condorcet, la démocratie et les lumières

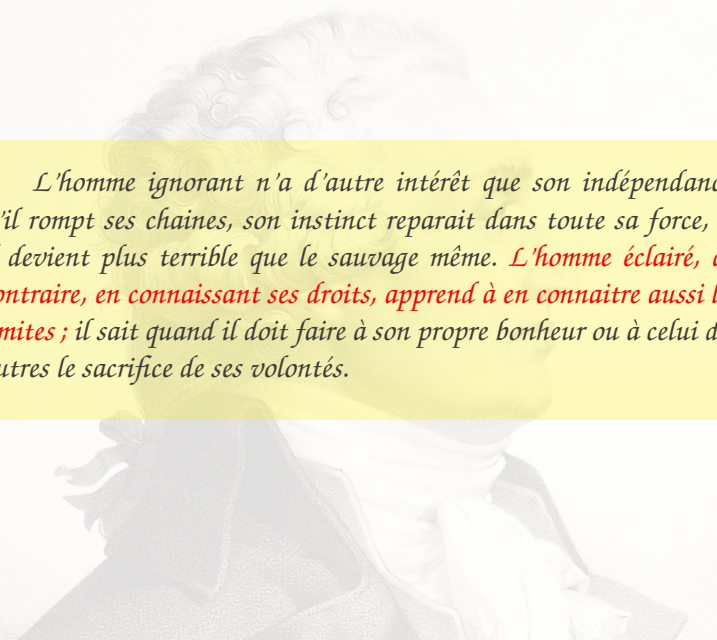
*Lorsque l'usage de soumettre tous les individus à la volonté du plus grand nombre s'introduisit dans les sociétés, les hommes n'adoptèrent pas cette méthode comme un moyen d'éviter l'erreur et de se conduire d'après des décisions fondées sur la vérité : mais ils trouvèrent que, pour le bien de la paix et l'utilité générale, **il fallait placer l'autorité où était la force**, et que c'était la volonté du petit nombre qui naturellement devait se sacrifier à celle du plus grand.*

*Parmi nous au contraire, il est de l'intérêt de ceux qui disposent de la force publique de **n'employer cette force que pour soutenir des décisions conformes à la vérité**, et de donner aux représentants des règles qui répondent de la bonté de leur décision.*

Condorcet, la démocratie et les lumières

Une assemblée très nombreuse ne peut pas être composée d'hommes très éclairés ; il est même vraisemblable que ceux qui la forment joindront sur bien des objets beaucoup d'ignorance à beaucoup de préjugés. Or comme ces préjugés, cette ignorance, peuvent exister sur des objets très importants, on voit qu'il peut être dangereux de donner une constitution démocratique à un peuple sans lumières : une démocratie pure ne pourrait même convenir qu'à un peuple beaucoup plus éclairé, beaucoup plus exempt de préjugés que ceux que nous connaissons par l'Histoire.

Condorcet, la démocratie et les lumières



*L'homme ignorant n'a d'autre intérêt que son indépendance. S'il rompt ses chaînes, son instinct reparait dans toute sa force, et il devient plus terrible que le sauvage même. **L'homme éclairé, au contraire, en connaissant ses droits, apprend à en connaître aussi les limites ;** il sait quand il doit faire à son propre bonheur ou à celui des autres le sacrifice de ses volontés.*

Analyse de la décision d'un jury



Analyse de la décision d'un jury

ESSAI
SUR L'APPLICATION
DE L'ANALYSE
à LA
PROBABILITÉ
DES DÉCISIONS

Rendues à la pluralité des voix.

*Par M. LE MARQUIS DE CONDORCET, Secrétaire perpétuel
de l'Académie des Sciences, de l'Académie Française, de
l'Institut de Bologne, des Académies de Pétersbourg, de
Turin, de Philadelphie & de Padoue.*

Quòd si deficiant vires audacia cœrèt
Laus erit, in magnis & voluissè fat est.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLXXXV.

V
7321

Analyse de la décision d'un jury

Condorcet analyse un jury de tribunal devant statuer sur la question : « L'accusé est-il coupable ou innocent ? ». Il fait les hypothèses suivantes :

- ▶ Aucun juré n'est infallible : chacun a une probabilité non nulle de se tromper.
- ▶ Cependant, la probabilité qu'un juré donné ait raison est toujours plus grande que celle qu'il se trompe.
- ▶ Le fait qu'un juré donné se trompe ou pas n'influe en rien sur le fait qu'un autre juré se trompe ou pas. [*indépendance*]

Analyse de la décision d'un jury

Condorcet analyse un jury de tribunal devant statuer sur la question : « L'accusé est-il coupable ou innocent ? ». Il fait les hypothèses suivantes :

- ▶ Aucun juré n'est infallible : chacun a une probabilité non nulle de se tromper.
- ▶ Cependant, la probabilité qu'un juré donné ait raison est toujours plus grande que celle qu'il se trompe.
- ▶ Le fait qu'un juré donné se trompe ou pas n'influe en rien sur le fait qu'un autre juré se trompe ou pas. [*indépendance*]

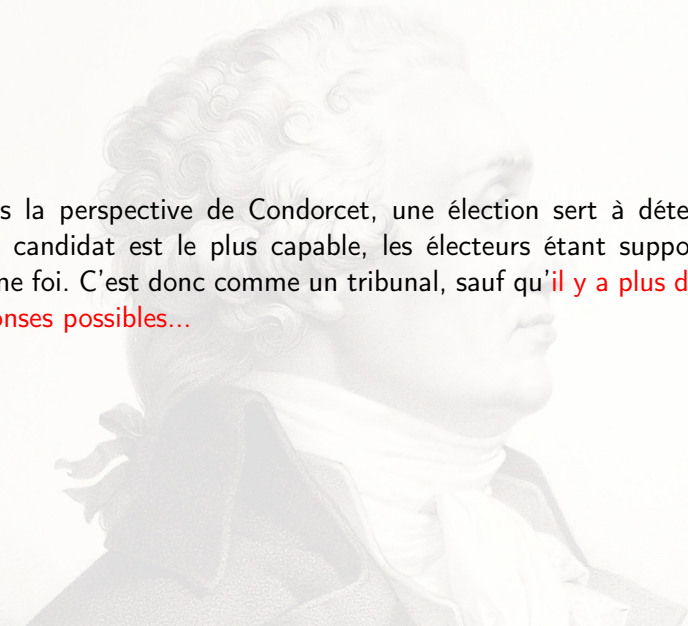
Alors, Condorcet montre que la probabilité que la majorité du jury se trompe devient extrêmement [*exponentiellement*] faible quand le nombre de jurés devient grand. [*loi des grands nombres*]

↪ Le vote est un moyen d'approcher la vérité.

Le cas des élections



Le cas des élections

A faded, grayscale portrait of a man with curly hair, likely Condorcet, is visible in the background. He is wearing a dark coat and a white cravat.

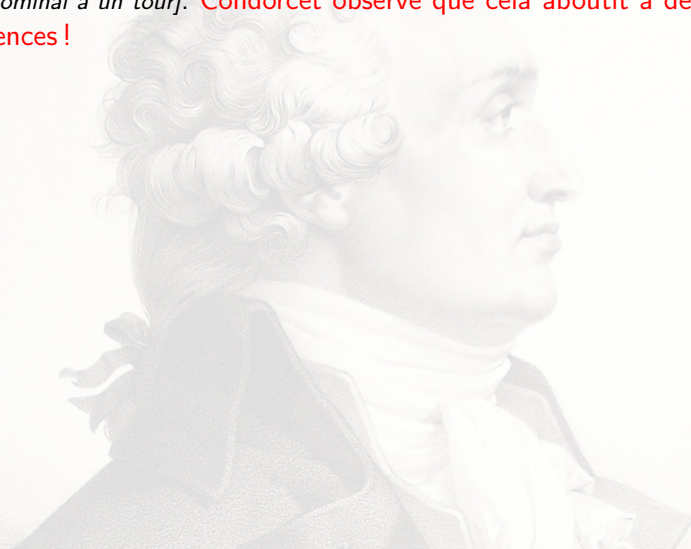
Dans la perspective de Condorcet, une élection sert à déterminer quel candidat est le plus capable, les électeurs étant supposés de bonne foi. C'est donc comme un tribunal, sauf qu'il y a plus de deux réponses possibles...

Défaut des systèmes de scrutins usuels



Défaut des systèmes de scrutins usuels

Méthode usuelle pour une élection : Chaque électeur dit qui, selon lui, est le meilleur ; et celui qui a le plus de voix est choisi. [*scrutin uninominal à un tour*]. Condorcet observe que cela aboutit à des incohérences !



Défaut des systèmes de scrutins usuels

Méthode usuelle pour une élection : Chaque électeur dit qui, selon lui, est le meilleur ; et celui qui a le plus de voix est choisi. [*scrutin uninominal à un tour*]. Condorcet observe que cela aboutit à des incohérences !

Exemple

Considérons 100 votants devant trancher entre 3 candidats *rouge*, *bleu* et *mauve*, sachant que *mauve* est un candidat “intermédiaire” entre *rouge* et *bleu*.

- ▶ 40 votants : *rouge* > *mauve* > *bleu* .
- ▶ 35 votants : *bleu* > *mauve* > *rouge* .
- ▶ 15 votants : *mauve* > *rouge* > *bleu* .
- ▶ 10 votants : *mauve* > *bleu* > *rouge* .

Par la méthode usuelle, *rouge* gagne par 40 voix contre 35 à *bleu* et 25 à *mauve*.

Défaut des systèmes de scrutins usuels

Méthode usuelle pour une élection : Chaque électeur dit qui, selon lui, est le meilleur ; et celui qui a le plus de voix est choisi. [*scrutin uninominal à un tour*]. Condorcet observe que cela aboutit à des incohérences !

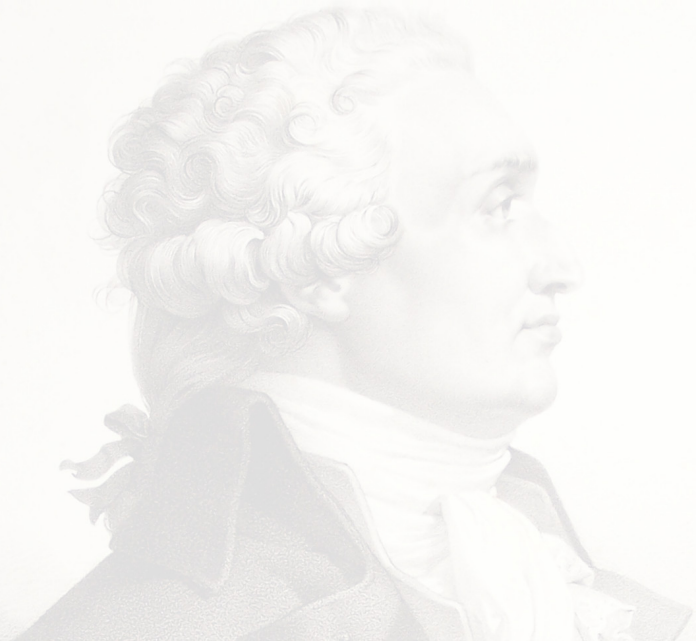
Exemple

Considérons 100 votants devant trancher entre 3 candidats *rouge*, *bleu* et *mauve*, sachant que *mauve* est un candidat “intermédiaire” entre *rouge* et *bleu*.

- ▶ 40 votants : *rouge* > *mauve* > *bleu* .
- ▶ 35 votants : *bleu* > *mauve* > *rouge* .
- ▶ 15 votants : *mauve* > *rouge* > *bleu* .
- ▶ 10 votants : *mauve* > *bleu* > *rouge* .

Par la méthode usuelle, *rouge* gagne par 40 voix contre 35 à *bleu* et 25 à *mauve*. Pourtant, une majorité de 60 votants préfère *mauve* à *rouge* !

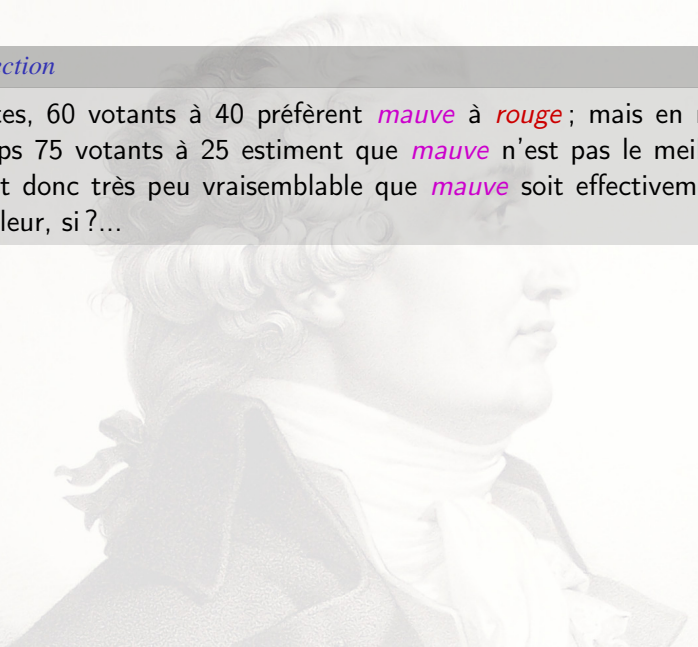
Qui est le juste vainqueur ?



Qui est le juste vainqueur ?

Objection

Certes, 60 votants à 40 préfèrent *mauve* à *rouge* ; mais en même temps 75 votants à 25 estiment que *mauve* n'est pas le meilleur : il est donc très peu vraisemblable que *mauve* soit effectivement le meilleur, si ?...



Qui est le juste vainqueur ?

Objection

Certes, 60 votants à 40 préfèrent *mauve* à *rouge* ; mais en même temps 75 votants à 25 estiment que *mauve* n'est pas le meilleur : il est donc très peu vraisemblable que *mauve* soit effectivement le meilleur, si ?...

Réponse de Condorcet

L'hypothèse qu'on a plus de chances de répondre juste que de se tromper ne vaut que pour une question « élémentaire ». Ici, la question « *mauve* est-il meilleur que *rouge* ? » est élémentaire ; mais la question « *mauve* est-il le meilleur ? » ne l'est pas, car elle combine la question précédente avec l'autre question « *mauve* est-il meilleur que *bleu* ? » !

Qui est le juste vainqueur ?

Définition (Scrutin de Condorcet)

Le scrutin de Condorcet est défini de la façon suivante.

- ▶ Chaque votant classe les différents candidats selon son ordre de préférence.
- ▶ Pour chaque **paire** de candidats, on regarde lequel a la préférence de la majorité **par rapport à l'autre**.
- ▶ **Le vainqueur** [*vainqueur de Condorcet*] **est celui qui est majoritairement préféré à n'importe quel autre candidat.**

Remarque

Dans l'exemple précédent, **mauve** était préféré non seulement à **rouge** mais aussi à **bleu** : c'était donc bien lui le vainqueur de Condorcet.

Qui est le juste vainqueur ?

Exemple

7 votants doivent choisir entre *rouge* (**R**), *vert* (**V**), *bleu* (**B**) et *jaune* (**J**).

▶ **B** > **R** > **V** > **J**.

▶ **V** > **J** > **B** > **R**.

▶ **R** > **J** > **V** > **B**.

▶ **V** > **B** > **J** > **R**.

▶ **J** > **R** > **V** > **B**.

▶ **B** > **V** > **J** > **R**.

▶ **J** > **V** > **B** > **R**.

Qui est le juste vainqueur ?

Exemple

7 votants doivent choisir entre *rouge* (**R**), *vert* (**V**), *bleu* (**B**) et *jaune* (**J**).

▶ **B** > **R** > **V** > **J**.

▶ **V** > **J** > **B** > **R**.

▶ **R** > **J** > **V** > **B**.

▶ **V** > **B** > **J** > **R**.

▶ **J** > **R** > **V** > **B**.

▶ **B** > **V** > **J** > **R**.

▶ **J** > **V** > **B** > **R**.

Cand ^t	c. R	c. V	c. B	c. J
<i>rouge</i>	s/o	3	2	2
<i>vert</i>	4	s/o	5	4
<i>bleu</i>	5	2	s/o	3
<i>jaune</i>	5	3	4	s/o

Qui est le juste vainqueur ?

Exemple

7 votants doivent choisir entre *rouge* (**R**), *vert* (**V**), *bleu* (**B**) et *jaune* (**J**).

▶ **B** > **R** > **V** > **J**.

▶ **V** > **J** > **B** > **R**.

▶ **R** > **J** > **V** > **B**.

▶ **V** > **B** > **J** > **R**.

▶ **J** > **R** > **V** > **B**.

▶ **B** > **V** > **J** > **R**.

▶ **J** > **V** > **B** > **R**.

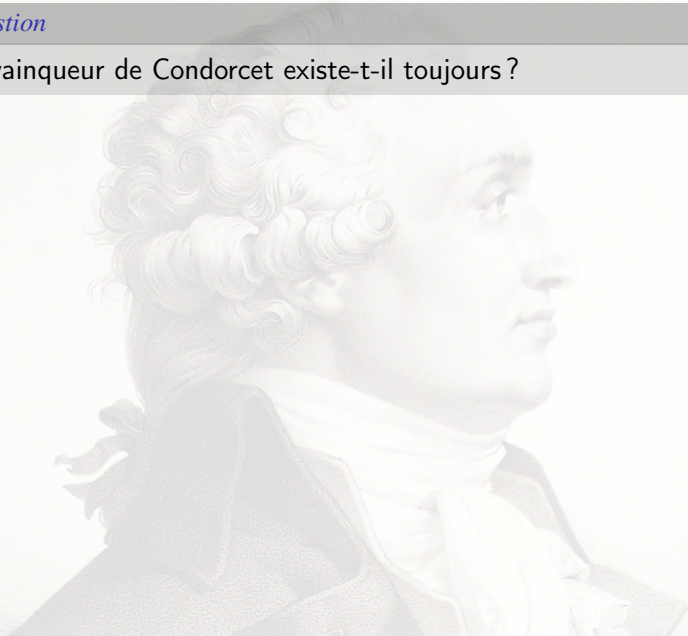
Cand ^t	c. R	c. V	c. B	c. J
<i>rouge</i>	s/o	3	2	2
<i>vert</i>	4	s/o	5	4
<i>bleu</i>	5	2	s/o	3
<i>jaune</i>	5	3	4	s/o

⇒ Le vainqueur est *vert* !

Qui est le juste vainqueur ?

Question

Le vainqueur de Condorcet existe-t-il toujours ?



Qui est le juste vainqueur ?

Question

Le vainqueur de Condorcet existe-t-il toujours ?

Réponse (Paradoxe de Condorcet)

Non !

Exemple

3 candidats A , B , C ; 9 votants dont les préférences sont les suivantes :

- ▶ 2 votants classent $A > B > C$;
- ▶ 3 votants classent $B > C > A$;
- ▶ 4 votants classent $C > A > B$.

Alors une majorité des votants préfère A à B (6 à 3) ; une majorité préfère B à C (5 à 4) ; mais... une majorité des votants préfère C à A (7 à 2) !

Qui est le juste vainqueur ?

Exemple

- ▶ 6 votants à 3 préfèrent A à B ;
- ▶ 5 votants à 4 préfèrent B à C ;
- ▶ 7 votants à 2 préfèrent C à A .

Question

Qui désigner vainqueur dans un tel cas ?

Qui est le juste vainqueur ?

Exemple

- ▶ 6 votants à 3 préfèrent A à B ;
- ▶ 5 votants à 4 préfèrent B à C ;
- ▶ 7 votants à 2 préfèrent C à A .

Question

Qui désigner vainqueur dans un tel cas ?

Réponse de Condorcet

Je considère que **la conclusion tirée d'une majorité large est plus sûre que celle tirée d'une majorité plus étroite**. Ici la majorité la plus large est pour $C > A$, donc je valide cette conclusion ; puis la suivante est pour $A > B$, que je valide aussi ; mais je rejette ensuite $B > C$, car cela contredirait mes conclusions précédentes. *[méthode des paires classées]*. **C est donc le vainqueur.**

Vers une démocratie plus sincère



Vers une démocratie plus sincère

Artefact des systèmes de scrutins classiques [*uninominaux*] : “vote utile”.

Exemple

Considérons trois candidats *Hamon*, *Macron* et *Fillon*, les deux derniers étant grands favoris du scrutin*. Imaginons un électeur qui se sent plus proche de *Hamon*, mais aime bien *Macron* aussi, et déteste *Fillon*. Il peut alors raisonner ainsi : « Puisque *Hamon* n’a pratiquement aucune chance, voter pour lui reviendrait à laisser les autres électeurs trancher entre *Macron* et *Fillon* : il vaut donc mieux que je vote *Macron*, afin d’influencer plus efficacement le résultat du scrutin ! ».

*. Tout lien avec une situation existante ou ayant existé serait totalement volontaire ;-)

Vers une démocratie plus sincère

Le “vote utile” soulève deux problèmes démocratiques :

- ▶ **Délégitime le résultat du scrutin** : *Trump* a-t-il vraiment 46 % de partisans, ou y a-t-il des partisans de *Johnson* qui ont préféré voter pour lui par opposition à *Clinton*? L'État n'a pas remboursé la campagne de *Joly* car elle avait moins de 5 % des voix, mais le “vote utile” n'a-t-il pas minoré son score?...
- ▶ **Rend très difficile l'émergence de nouveaux candidats** : les électeurs évitent de voter pour les candidats « mineurs », mais du coup ceux-ci font de mauvais scores, d'où cercle vicieux...
~> Offre politique artificiellement restreinte.

Vers une démocratie plus sincère

Condorcet explique que le “vote utile” est inhérent aux systèmes de scrutins classiques [*uninominaux*] :

On suppose seulement trois concurrents, Pierre, Jacques et Paul. Celui qui vote en faveur de Pierre prononce bien qu'il croit Pierre supérieur aux deux autres ; mais il ne prononce point entre Jacques et Paul.

Vers une démocratie plus sincère

Condorcet explique que le “vote utile” est inhérent aux systèmes de scrutins classiques [*uninominaux*] :

On suppose seulement trois concurrents, Pierre, Jacques et Paul. Celui qui vote en faveur de Pierre prononce bien qu'il croit Pierre supérieur aux deux autres ; mais il ne prononce point entre Jacques et Paul.

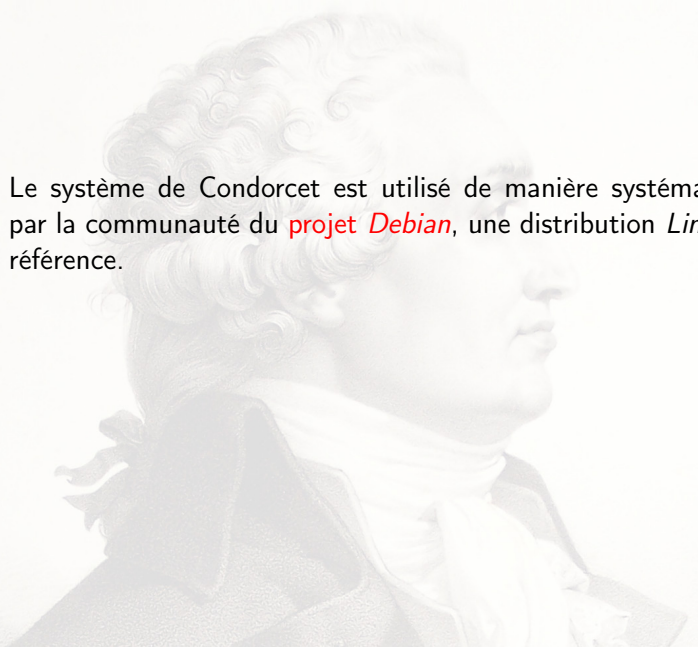
Le système de Condorcet ne présente pas cet inconvénient, puisqu'il est maintenant possible d'exprimer à la fois sa priorité pour *Pierre* et sa préférence entre *Jacques* et *Paul* \rightsquigarrow Résout le souci du “vote utile” !

Utilisation historique du système de Condorcet

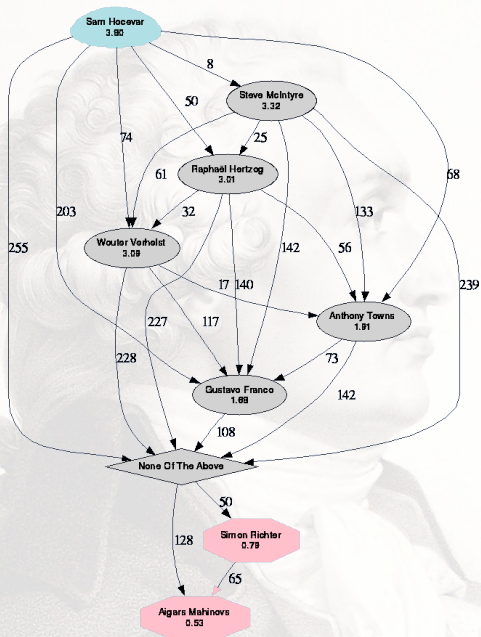


Utilisation historique du système de Condorcet

- ▶ Le système de Condorcet est utilisé de manière systématique par la communauté du **projet Debian**, une distribution *Linux* de référence.



Utilisation historique du système de Condorcet



Utilisation historique du système de Condorcet

- ▶ Le système de Condorcet est utilisé de manière systématique par la communauté du **projet Debian**, une distribution *Linux* de référence.
- ▶ Il a aussi été utilisé en 2016 lors de la consultation populaire pour le **nouveau nom de la région Languedoc-Roussillon-Midi-Pyrénées**.

Utilisation historique du système de Condorcet



RESULTATS DES DUELS SELON LA METHODE CONDORCET (en %)



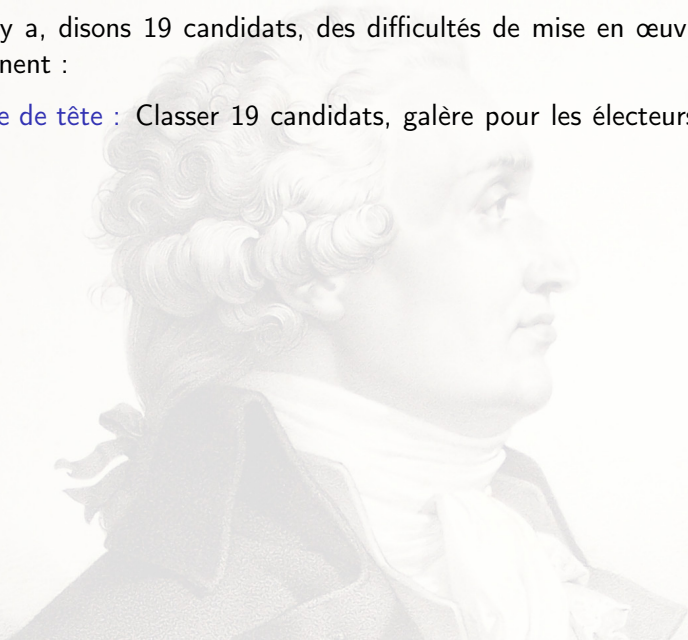
Un problème logistique



Un problème logistique

S'il y a, disons 19 candidats, des difficultés de mise en œuvre surviennent :

Prise de tête : Classer 19 candidats, galère pour les électeurs !

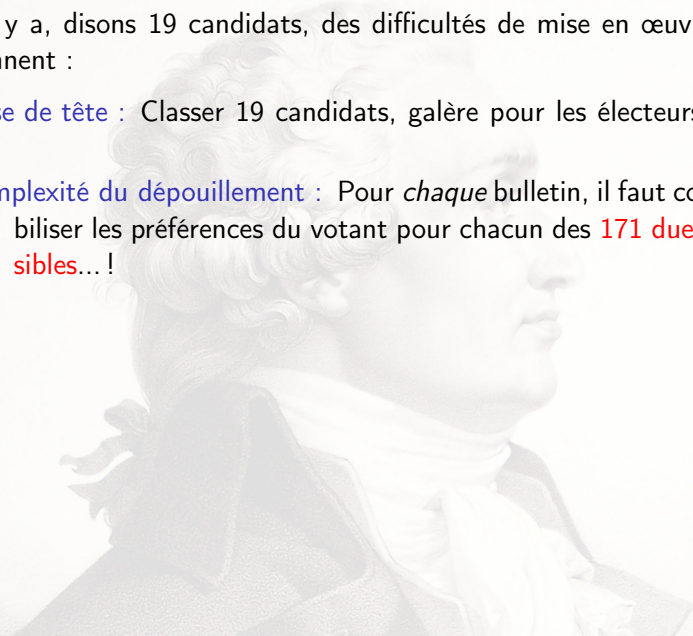


Un problème logistique

S'il y a, disons 19 candidats, des difficultés de mise en œuvre surviennent :

Prise de tête : Classer 19 candidats, galère pour les électeurs !

Complexité du dépouillement : Pour *chaque* bulletin, il faut comptabiliser les préférences du votant pour chacun des **171 duels possibles**... !



Un problème logistique

S'il y a, disons 19 candidats, des difficultés de mise en œuvre surviennent :

Prise de tête : Classer 19 candidats, galère pour les électeurs !

Complexité du dépouillement : Pour *chaque* bulletin, il faut comptabiliser les préférences du votant pour chacun des **171 duels possibles**... !

Anonymat du vote : Comme il y a 121 millions de milliards [*factorielle de 19*] bulletins possibles, on peut "signer" son bulletin par l'ordre des candidats mineurs.

Un problème logistique

S'il y a, disons 19 candidats, des difficultés de mise en œuvre surviennent :

Prise de tête : Classer 19 candidats, galère pour les électeurs ! (Cependant on peut autoriser des ex-æquo ou des classements partiels).

Complexité du dépouillement : Pour *chaque* bulletin, il faut comptabiliser les préférences du votant pour chacun des **171 duels possibles**... ! (Cependant on peut confier le dépouillement à des machines, ne vérifiant à la main que les cas essentiels).

Anonymat du vote : Comme il y a 121 millions de milliards [*factorielle de 19*] bulletins possibles, on peut “signer” son bulletin par l'ordre des candidats mineurs. (Cependant on peut organiser le dépouillement de façon à empêcher la lecture des “signatures”).

Remarque

Il existe toutefois des solutions pour minorer ces difficultés.

Un problème logistique

Le système de Condorcet n'est donc peut-être pas la meilleure solution en pratique...

La méthode analysée est la seule qui puisse conduire à connaître le vrai jugement de la majorité. Mais cette méthode paraît impraticable dans tous les cas où le nombre de sujets éligibles n'est pas très borné.

Contre-proposition de Condorcet



Contre-proposition de Condorcet

En pratique, Condorcet le système suivant : chaque votant indique les candidats qu'il estime être dignes d'être élus, sans restriction de nombre ; et on élit celui qui a le plus de voix ! *[vote par approbation]*.

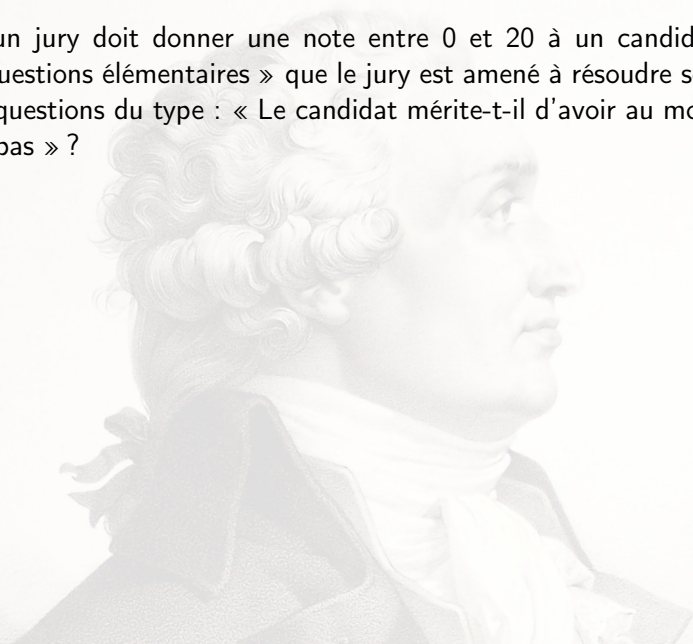
Chaque électeur formerait une liste des concurrents qu'il croit les plus dignes de la place. On choisirait le concurrent qui se trouverait dans un plus grand nombre de listes.

Noter avec Condorcet



Noter avec Condorcet

Si un jury doit donner une note entre 0 et 20 à un candidat, les « questions élémentaires » que le jury est amené à résoudre sont les 20 questions du type : « Le candidat mérite-t-il d'avoir au moins 14 ou pas » ?



Noter avec Condorcet

Si un jury doit donner une note entre 0 et 20 à un candidat, les « questions élémentaires » que le jury est amené à résoudre sont les 20 questions du type : « Le candidat mérite-t-il d'avoir au moins 14 ou pas » ?

Théorème

*Dans ce cas, il y a **forcément** une note qui est vainqueuse de Condorcet !*

Démonstration.

Il est évident que 100 % du jury estime que le candidat mérite au moins 0, et 0 % estime qu'il mérite au moins 21. En outre, entre 0 et 21 la proportion du jury d'accord avec au moins cette note ne fait que décroître. Regardons quand est-ce qu'on passe le seuil de 50 % : par exemple, une majorité 51 % du jury était d'accord pour une note d'au moins 7, mais une minorité de seulement 37 % est d'accord pour une note d'au moins 8. Alors, d'après le système de Condorcet, la juste note est 7 !

Noter avec Condorcet

Théorème

En fait, il y a un critère très simple pour déterminer la note vainqueuse de Condorcet : on demande à chaque juré quelle note il estime être la plus juste pour la copie, on classe ces notes dans l'ordre, et on prend celle du milieu [médiane] : on peut démontrer que cette note correspond toujours à la vainqueuse de Condorcet.

Exemple

9 jurés attribuent respectivement les notes 9, 3, 11, 11, 6, 10, 12, 4 et 11 au candidat. On range dans l'ordre :

$$3 \leq 4 \leq 6 \leq 9 \leq 10 \leq 11 \leq 11 \leq 11 \leq 12 ;$$

la note médiane est donc 10. [alors que la moyenne serait 8,6...].

Noter avec Condorcet

Définition (Jugement majoritaire, Balinski & Laraki 1996)

Le *jugement majoritaire* est un système où chaque votant note chacun des candidats (p. ex. par « Très bon », « Bon », « Moyen » ou « Mauvais »); puis on regarde l'ensemble des notes reçues par chaque candidat, et celui qui a la meilleur médiane gagne!

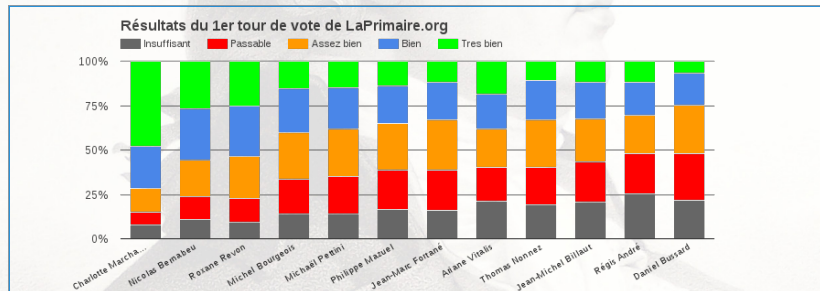


Noter avec Condorcet

Définition (Jugement majoritaire, Balinski & Laraki 1996)

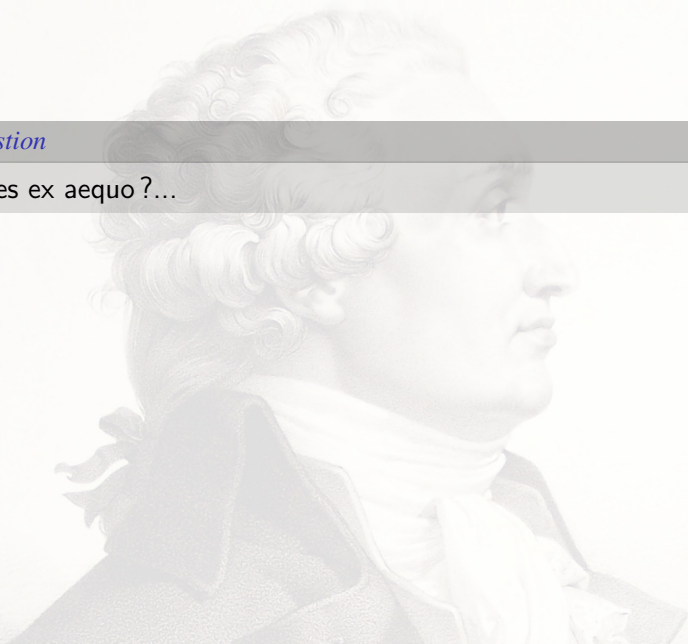
Le *jugement majoritaire* est un système où chaque votant note chacun des candidats (p. ex. par « Très bon », « Bon », « Moyen » ou « Mauvais »); puis on regarde l'ensemble des notes reçues par chaque candidat, et celui qui a la meilleur médiane gagne !

Ce système a été utilisé par la plateforme « laprimaire.org » pour choisir un « candidat citoyen » à l'élection présidentielle de 2017.



Question

Et les ex aequo?...



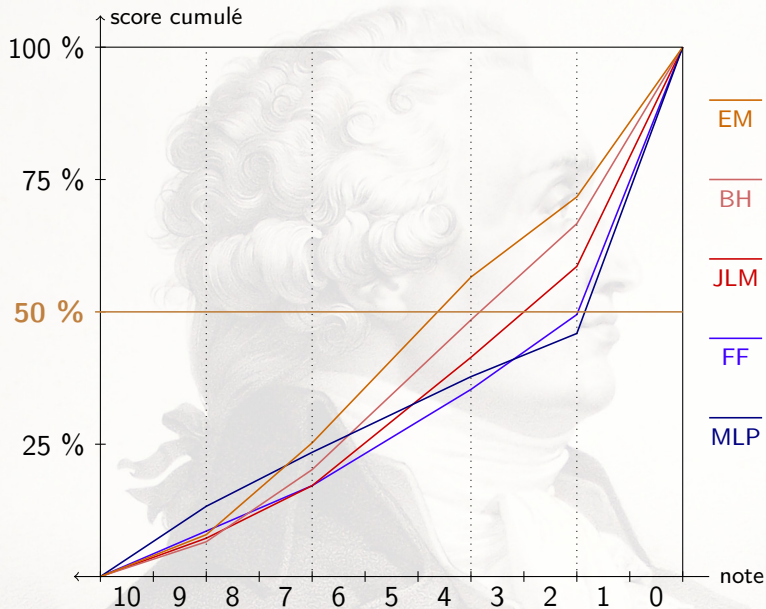
Question

Et les ex aequo ?...

Réponse

On fait comme si la mention « Bon », par exemple, se nuancit en plein de sous-mentions « Bon-plus », « Bon-demi-plus », « Bon-normal », « Bon-demi-moins », etc., et que ces mentions étaient distribuées uniformément parmi les mentions « Bon ».

Noter avec Condorcet



Conclusion







Conclusion

- ▶ Ambition de Condorcet : appliquer la science aux questions sociales pour rendre la société plus conforme à la justice universelle.
- ▶ Souligne que les méthodes usuelles d'élection sont gravement défectueuses.
- ▶ Propose et justifie un critère juste pour déterminer le vainqueur légitime d'une élection.
- ▶ Réfléchit à un système plus pratique pour raisons logistiques.
- ▶ Aujourd'hui, travaux repris par d'autres scientifiques ; des solutions théoriquement solides et concrètement utilisables existent.

Conclusion

- ▶ Ambition de Condorcet : appliquer la science aux questions sociales pour rendre la société plus conforme à la justice universelle.
- ▶ Souligne que les méthodes usuelles d'élection sont gravement défectueuses.
- ▶ Propose et justifie un critère juste pour déterminer le vainqueur légitime d'une élection.
- ▶ Réfléchit à un système plus pratique pour raisons logistiques.
- ▶ Aujourd'hui, travaux repris par d'autres scientifiques ; des solutions théoriquement solides et concrètement utilisables existent.
- ▶ **Qu'est-ce qu'on attend, alors... ?**

Bibliographie

-  *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, par J. A. N. de Caritat, marquis de Condorcet (1785). Domaine public (téléchargeable p. ex. sur le site web de la BnF).
-  *Essai sur la constitution et les fonctions des assemblées provinciales*, par J. A. N. de Caritat, marquis de Condorcet (1788). Domaine public (téléchargeable p. ex. sur le site web de la BnF).
-  *Et le vainqueur du second tout est...*, par R. Peyre (2012), paru sur *Images des Mathématiques*.
images.math.cnrs.fr/Et-le-vainqueur-du-second-tour-est.html
-  *La quête du Graal électoral*, par R. Peyre (2013), paru sur *Images des Mathématiques*.
images.math.cnrs.fr/La-quete-du-Graal-electoral.html