Théorie des lieux et probabilités

Rémi Peyre

9 juin 2021

1 Première motivation

Quand on coupe une ficelle, de quel côté se retrouve le point qui était à l'endroit de la coupure? Voir $\mathbb{R}$ comme un ensemble de points n'est pas très satisfaisant. De même, pourquoi voir $\mathbb{R}$ comme une réunion de points sans longueur alors que $\mathbb{R}$ lui-même a une longueur?

On peut répondre à ces questions en considérant les choses à ensemble λ-négligeable près, mais le souci est que la notion d'ensemble λ-négligeable dépend du choix de λ…

On va plutôt proposer une approche basée sur la topologie. Cela peut sembler bizarre de faire intervenir la topologie pour la théorie de la mesure, mais en réalité c'est bien de là que vient la théorie de la mesure: une mesure (sur un espace compact séparable) est un élément du dual des fonctions continues. La théorie axiomatique n'est qu'un artifice: d'ailleurs, personne n'a jamais fait de probabilités intéressantes sur la tribu engendrée par les singletons de $\mathbb{R}$… En fait, la théorie de la mesure provient d'une tentative de généraliser l'intégration au-delà du cas des fonctions continues: ce n'est pas une approche orthogonale à la topologie, mais une extension de celle-ci!

2 Notion de lieu

Soit E un espace sympathique, p. ex. $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{T}^d$. E est muni d'une topologie, soit $\mathfrak{U}(E)$ l'ensemble de ses ouverts.

Definition 1 (Lieu)**.** Un *lieu* de E est une partie de $\mathfrak{U}(E)$:

(i) Stable par intersection finie (et donc contenant E);

(ii) Stable par majorant.

On parle aussi de *filtre*: le mot "filtre" s'utilise quand on veut étudier des notions de limites diverses, alors qu'on verra les "lieux" comme des parties généralisées, confer infra.

Je noterai $\mathfrak{L}(E)$ l'ensemble des lieux de E.

Definition 2. Pour $X \in \mathfrak{P}(E)$, on note $\mathcal{F}il(X) := \{U \in \mathfrak{U}(E) \mid U \supseteq X\}$: c'est le filtre les voisinages de X, ou "lieu associé à X".

Lemma 3. *Pour $X, Y \in \mathfrak{P}(E)$, on a $X \subseteq Y \iff \mathcal{F}il(X) \supseteq \mathcal{F}il(Y)$.*

Proof. Pour $X \subseteq Y$, il est clair que tout voisinage de Y est un voisinage de X. À l'inverse, si $X \not\subseteq Y$, on peut considérer $x \in X \setminus Y$: alors $E \setminus \{x\}$ est un voisinage de Y mais pas de X, et donc $\mathcal{F}il(Y) \not\subset \mathcal{F}il(X)$.

Pour cette raison, on peut voir les lieux come des sous-ensembles généralisés.

Notation 4. On note X_ℓ le lieu associé à X. Lorsque les lieux sont vus comme des ensembles généralisés, on les note avec des symboles classiques; lorsqu'ils sont vus comme des filtres, avec des symboles calligraphiques. Pour dire qu'on veut voir le lieu L comme un filtre, on note $\mathcal{F}il(L)$.

Pour L, M des lieux, on note $L \subseteq_\ell M$ pour signifier que $\mathcal{F}il(L) \supseteq \mathcal{F}il(M)$. On note $x \in_\ell L$ pour signifier que $\{x\}_\ell \subseteq_\ell L$.

Definition 5. Pour L un lieu, l'ensemble des points de L, noté $\mathrm{Points}(L)$ est

$$\{x \in E \mid x \in_\ell L\}.$$

Lemma 6. *Pour tout $X \in \mathfrak{P}(E)$, $\mathrm{Points}(\mathcal{F}il(X)) = X$.*

Proposition 7. *Il existe un lieu, autre que le lieu associé à $\emptyset$ (lequel est constitué par le filtre de* tous *les ouverts), qui ne contient aucun point.*

Proof. Le filtre des ouverts denses de E est un tel lieu.

Example 8 (Exemples de lieux). Outre les lieux associés à des parties de E, on a les exemples suivants:

- Le filtre des ouverts denses;
- Le filtre des voisinages de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$;
- Le filtre des ouverts co-compacts dans $\mathbb{R}^d$;
- Le filtre des voisinages à droite de 0 dans $\mathbb{R}$: $\{U \in \mathfrak{U}(\mathbb{R}) \mid \exists \varepsilon > 0\ (0, \varepsilon) \subseteq U\}$;
- Le filtre des germes du premier quadrant ouvert dans $\mathbb{R}^2$: $\{U \in \mathfrak{U}(\mathbb{R}^2) \mid \exists \varepsilon > 0\ (0, \varepsilon)^2 \subseteq U\}$;
- Le filtre des ouverts de comesure nulle.

3 Lieux et mesure

On supposera ici $E = \mathbb{T}^d$ ou $E = \mathbb{R}^d$, avec la mesure de Lebesgue.

Definition 9. Pour $L \in \mathfrak{L}(E)$, on pose

$$\lambda_\ell(L) := \inf\{U \in \mathfrak{U}(E) \mid U \in \mathcal{F}il(L)\}.$$

Remark 10. Cette définition ne fait intervenir que la mesure de Lebesgue d'*ouverts*, qui peut être définie aisément sans avoir à reconstruire toute la théorie de la mesure.

Remark 11. Pour $X \in \mathfrak{P}(E)$, $\lambda_\ell(X_\ell)$ n'est autre que la mesure extérieure de Lebesgue de X.

Lemma 12. *Pour $X \in \mathfrak{L}eb(E)$, $\lambda_\ell(X_\ell) = \lambda(X)$.*

Proof. Parce que la mesure de Lebesgue est extérieurement régulière.

Proposition 13. *Il existe un plus petit (au sens des lieux) lieu de mesure pleine dans $\mathbb{T}^d$: c'est le filtre des ouverts de mesure pleine. Je le noterai donc* $\mathrm{supp}_\ell(\lambda)$.

Proof. "Le plus petit au sens des lieux", cela signifie le plus grand au sens des filtres. Or un lieu de mesure pleine ne peut, en tant que filtre, contenir que des ouverts de mesure pleine (par définition de la mesure d'un lieu): donc, si le filtre de tous les ouverts de mesure plein est bien un lieu de mesure pleine (et c'est effectivement le cas, trivialement), c'est le plus grand de tous. □

4 Quelques paradoxes en théorie de la mesure

Proposition 14 (Paradoxe de Vitali)**.** *Il n'existe pas de mesure (au sens classique) sur $\mathfrak{P}(\mathbb{T}^1)$ tout entier qui soit invariante par translation.*

Proof. C'est un classique: on construit X en prenant un point dans chaque classe d'équivalence de $\mathbb{T}^1 / (\mathbb{Q} / \mathbb{Z})$. Les $X + q$ pour $q \in \mathbb{Q} / \mathbb{Z}$ forment alors une partition dénombrable de $\mathbb{T}^1$: si on pouvait étendre la mesure de Lebesgue comme annoncé, tous ces sous-ensembles auraient la même mesure, donc la mesure de leur union serait soit 0 (si cette mesure commune était nulle), soit l'infini (si elle était non nulle), alors qu'en réalité elle doit valoir 1. □

Remark 15. Cette preuve repose sur l'axiome du choix (AC), et certains y voient une raison de rejeter AC. Mais en fait, du point de vue de la théorie des ensembles, tout le monde croit à AC: les versions de la théorie des ensembles où on n'a pas AC reviennent à considérer qu'on appelle "ensembles" seulement certains ensembles spécifiques. Ici on veut parler d'une mesure sur tout $\mathfrak{P}(\mathbb{T}^1)$, donc on veut vraiment avoir une ontologie maximale de la notion de sous-ensemble, et donc le seul choix raisonnable est d'accepter AC.

Theorem 16 (Théorème d'Ulam)**.** *L'hypothèse du continu*[*] *entraine que les seules mesures sur tout* $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ *sont les mesures discrètes; en particulier, aucune mesure sur* $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ *n'étend la mesure de Lebesgue.*

Corollary 17. *Il n'est pas possible de prouver, à partir de l'axiomatique usuelle* ZFC*, qu'il existe une extension de la mesure de Lebesgue à* $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ *tout entier.*

Proof. Parce qu'on sait que HC n'est pas réfutable dans ZFC. □

Proposition 18. *Il existe un mesure* finiment *additive qui étend* λ *à* $\mathfrak{P}(\mathbb{T}^d)$ *tout entier.*

Proof. Notons $\mathcal{B}ornées(\mathbb{T}^d)$ l'ensemble des fonctions (pas forcément mesurables) bornées de $\mathbb{T}^d$ dans $\mathbb{R}$: muni de la norme du supremum, cet espace est de Banach, et l'ensemble des fonctions *Lebesgue-mesurables* bornées en est un sous-espace vectoriel, notons-le $\mathcal{M}$. L'application

$$\mathcal{M} \ni f \mapsto I(f) := \int_{x\in\mathbb{T}^d} f(x)\lambda(\mathrm{d}x)$$

est une application linéaire de norme $\leqslant 1$ sur $\mathcal{M}$; par le théorème de Hahn-Banach[†], on peut donc l'étendre en une application bornée par $\leqslant 1$ sur $\mathcal{B}ornées(\mathbb{T}^d)$ tout entier. Cette application est nécessairement positive, car pour $f \geqslant 0$, pour $\varepsilon \leqslant 2 \,/\, \sup f$, on a

$$1 - \varepsilon I(f) = I(1 - \varepsilon f) \leqslant \sup(1 - \varepsilon f) \leqslant 1.$$

Finalement, on obtient l'extension recherchée de la mesure de Lebesgue en considérant que la mesure de X est $I(\mathbf{1}_X)$. □

Theorem 19 (Paradoxe de Banach-Tarski)**.** *Soit* B *la boule unité de* $\mathbb{R}^3$*. Il existe une partition finie* $B = \bigsqcup_{i=1}^n X_i$ *et des isométries* ι_i *telles que*

$$\bigcup_{i=1}^n \iota_i(X_i) \supseteq 2B.$$

Corollary 20. *Il n'existe pas d'extension de la mesure de Lebesgue à tout* $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^3)$ *comme mesure finiment additive qui soit invariante par isométries.*

Proof. En effet, notant V le volume de la boule unité, on aurait $\sum_i \lambda(X_i) = V$, d'où $\sum_i \lambda(\iota_i(X_i)) = V$ et donc $\lambda\big(\bigcup_i(\iota_i(X_i))\big) \leqslant V$, alors qu'en réalité $\lambda(2B) = 8V > V$. □

Remark 21. Le paradoxe de Banach-Tarski ne marche pas en dimensions 1 et 2. (On pourrait croire que l'existence d'une mesure "convenable" sur $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ entrainerait l'existence d'une mesure convenable sur $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^3)$ par produit; mais en réalité quand on regarde la construction de la mesure produit, on a une problème car la tribu-produit $\mathfrak{P}(\mathbb{R})^{\otimes 3}$ n'est pas $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^3)$…). En dimension 2, on a néanmoins le *paradoxe de von Neumann*: on ne peut pas exiger qu'une extension finiment additive de la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$ tout entier soit invariante par toute transformation affine spéciale (i.e. de déterminant 1).

[*] L'hypothèse du continu (HC) signifie que toute partie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas (finie ou) dénombrable peut être mise en bijection avec $\mathbb{R}$ tout entier: il n'exite pas de cardinal intermédiaire entre $\aleph_0$ et $2^{\aleph_0}$.

[†] Qui, incidemment, utilise l'axiome du choix… ☺

5 Intersection de lieux

À priori, la mesure de Lebesgue extérieure de Lebesgue résout les paradoxes ci-dessus, puisqu'elle est définie sur tout $\mathfrak{P}(E)$ et qu'elle est bien invariante par les transformations affines spéciales. Mais elle n'est pas additive: de manière générale, on n'a pas $\bar{\lambda}(X \sqcup Y) = \bar{\lambda}(X) + \bar{\lambda}(Y)$ mais seulement $\bar{\lambda}(X \sqcup Y) \leqslant \bar{\lambda}(X) + \bar{\lambda}(Y)$. Cependant, quand on raisonne en termes de lieux, la notion d'"être disjoint" devient plus restrictive, et on va retomber sur nos pattes!

Definition 22. Pour $L, M \in \mathfrak{L}(E)$, on définit les réunion et intersection de L et M (au sens des lieux) par resp.

$$\mathcal{F}il(L \cup_\ell M) := \mathcal{F}il(L) \cup \mathcal{F}il(M);$$
$$\mathcal{F}il(L \cap_\ell M) := \{U \cap V \mid U \in \mathcal{F}il(L), V \in \mathcal{F}il(M)\}.$$

Remark 23. La définition pour l'intersection est la seule qui soit naturelle si on veut bien obtenir un filtre.

Remark 24. On a aussi $\mathcal{F}il(L \cup_\ell M) = \{U \cup V \mid U \in \mathcal{F}il(L), V \in \mathcal{F}il(M)\}$. En effet, pour $W \in \mathcal{F}il(L \cup_\ell M)$, on peut écrire $W = W \cup W$; et si $U \in \mathcal{F}il(L), V \in \mathcal{F}il(M)$, alors par stabilité par majorant on a $U \cup V \in \mathcal{F}il(L)$ et $U \cup V \in \mathcal{F}il(M)$, d'où $U \cup V \in \mathcal{F}il(L) \cap \mathcal{F}il(M) \underset{\text{déf}}{=} \mathcal{F}il(L \cup_\ell M)$.

Lemma 25. *Pour $X, Y \in \mathfrak{P}(E)$, $X_\ell \cup_\ell Y_\ell = (X \cup Y)_\ell$.*

Proof. Évident par définition: être à la fois un voisinage de X et de Y, c'est être un ouvert qui contient simultanément X et Y, i. e. un ouvert qui contient $X \cup Y$, i. e. un voisinage de $X \cup Y$. □

Proposition 26. *En général, on n'a pas $X_\ell \cap_\ell Y_\ell = (X \cap Y)_\ell$.*

Proof. Considérons l'intersection de $(\mathbb{R}^*_-)_\ell$ et $(\mathbb{R}_+)_\ell$. Vue en tant que filtre, c'est l'ensemble des ouverts obtenus en intersectant un voisinage de $\mathbb{R}^*_-$ et un voisinage de $\mathbb{R}_+$. Un voisinage de $\mathbb{R}^*_-$ peut s'écrire sous la forme $\mathbb{R}^*_- \cup U$ pour U un ouvert quelconque de $\mathbb{R}$, tandis qu'un voisinage de $\mathbb{R}_+$ est un voisinage à la fois de $\{0\}$ et de $\mathbb{R}^*_+$, et s'écrit donc $\mathbb{R}^*_+ \cup (\pm\varepsilon) \cup V$ pour V un ouvert quelconque de $\mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Du coup, un intersection de deux tels voisinages contient toujours un $(-\varepsilon, 0]$, et inversement tout ouvert W contenant $(-\varepsilon, 0]$ peut s'écrire comme intersection de deux tels voisinages (en prenant $U = V = W$ dans les décompositions précédentes). Le lieu d'intersection de $(\mathbb{R}^*_-)_\ell$ et $(\mathbb{R}_+)_\ell$ est donc le filtre des voisinages à gauche de 0 (i. e., l'ensemble des ouverts contenant un $(-\varepsilon, 0]$), qui n'est pas le filtre associé à l'ensemble vide (puisque $\emptyset$ n'appartient pas à ce filtre). □

Remark 27. En revanche, on a bien que $\text{Points}(L \cap_\ell M) = \text{Points}(L) \cap \text{Points}(M)$.

Proof. Si $x \in_\ell L$ et $x \in_\ell M$, alors tout ouvert de L (vu comme filtre) contient x, et tout ouvert de M aussi, donc par définition tout ouvert de $(L \cap_\ell M)$ contient x, ce qui signifie bien que $x \in_\ell L \cap_\ell M$.

Inversement, si par exemple $x \notin_\ell L$, alors il existe un ouvert de $\mathcal{F}il(L)$ qui ne contient pas x, donc en intersectant un tel ouvert avec un ouvert quelconque de $\mathcal{F}il(M)$ (il en existe au moins un puisqu'on a toujours $E \in \mathcal{F}il(M)$), on obtient un ouvert de $\mathcal{F}il(L \cap_\ell M)$ ne contenant pas x. □

Theorem 28. *Si $L, M \in \mathfrak{L}(\mathbb{T}^d)$, alors*

$$\lambda_\ell(L \cap_\ell M) + \lambda_\ell(L \cup_\ell M) = \lambda_\ell(L) + \lambda_\ell(M).$$

Corollary 29. *Si L et M sont disjoints* au sens des lieux*, alors $\lambda_\ell(L \sqcup_\ell M) = \lambda_\ell(L) + \lambda_\ell(M)$.*

Proof. On va prouver les deux inégalités. Soit ε abritrairement petit. Prenons $U \in \mathcal{F}il(L)$ et $V \in \mathcal{F}il(M)$ avec $\lambda(U) \leqslant \lambda_\ell(L) + \varepsilon$, resp. $\lambda(V) \leqslant \lambda_\ell(M) + \varepsilon$. On observe que $U \cap V \in \mathcal{F}il(L \cap_\ell M)$ et que $U \cup V \in \mathcal{F}il(L \cup_\ell M)$, donc $\lambda_\ell(\mathcal{F}il(L \cap_\ell M)) \leqslant \lambda(U \cap V)$ et $\lambda_\ell(\mathcal{F}il(L \cup_\ell M)) \leqslant \lambda(U \cup V)$. Or pour U et V des ouverts quelconques, on a $\lambda(U \cap V) + \lambda(U \cup V) = \lambda(U) + \lambda(V)$, donc en appliquant cette propriété on trouve que $\lambda_\ell(\mathcal{F}il(L \cup_\ell M)) + \lambda_\ell(\mathcal{F}il(L \cap_\ell M)) \leqslant \lambda(U \cap V) + \lambda(U \cup V) = \lambda(U) + \lambda(V) \leqslant \lambda_\ell(L) + \lambda_\ell(M) + 2\varepsilon$.

Dans l'autre sens, soient $W_\cap \in \mathcal{F}il(L \cap M)$ et $W_\cup \in \mathcal{F}il(L \cup M)$ avec $\lambda(W_\cap) \leqslant \lambda_\ell(\mathcal{F}il(L \cap M)) + \varepsilon$, resp. $\lambda(W_\cup) \leqslant \lambda_\ell(\mathcal{F}il(L \cup M)) + \varepsilon$. Par définition, on peut écrire $W_\cap = U \cap V$ avec $U \in \mathcal{F}il(L)$ et $V \in \mathcal{F}il(M)$. Soient $\tilde{U} := U \cap W_\cup$ et $\tilde{V} := V \cap W_\cup$: puisque $W_\cup \in \mathcal{F}il(L \cup_\ell M)$, on a en particulier $W_\cup \in \mathcal{F}il(L)$, de sorte qu'on a toujours $\tilde{U} \in \mathcal{F}il(L)$, et de même $\tilde{V} \in \mathcal{F}il(M)$. En outre, puisque $\tilde{U} \in \mathcal{F}il(L)$, on a $\tilde{U} \cap \tilde{V} \in \mathcal{F}il(L)$, et de même $\tilde{U} \cap \tilde{V} \in \mathcal{F}il(M)$, d'où (par définition de l'union de deux lieux) $\tilde{U} \cap \tilde{V} \in \mathcal{F}il(L \cup_\ell M)$. Par conséquent on a $\tilde{U} \cap \tilde{V} \subseteq W_\cap$ et $\tilde{U} \cup \tilde{V} \subseteq W_\cup$, mais $\tilde{U} \cap \tilde{V}$ et $\tilde{U} \cup \tilde{V}$ sont toujours des ouverts respectifs de $\mathcal{F}il(L \cap M)$ et $\mathcal{F}il(L \cup M)$. Ainsi on peut rajouter à la condition de départ que $W_\cap$ et $W_\cup$ s'écrivent respectivement $\tilde{U} \cap \tilde{V}$ et $\tilde{U} \cup \tilde{V}$ pour $\tilde{U} \in \mathcal{F}il(L)$ et $\tilde{V} \in \mathcal{F}il(M)$. Dès lors, on finit la démonstration avec le même argument que dans le premier sens ☺ □

On a aussi le passage à la limite croissante:

Proposition 30. *Si $(L_i)_{i \in \mathbf{N}}$ est une suite croissante de lieux de $\mathbb{T}^d$, alors cette suite a un plus petit majorant (au sens des lieux), qu'on note $\bigcup_\ell^\nearrow L_i$, et on a*

$$\lambda_\ell\Big(\overset{\nearrow}{\bigcup_\ell} L_i\Big) = \overset{\nearrow}{\lim} \lambda_\ell(L_i).$$

Proof. Un majorant de tous les L_i doit, en tant que filtre, être contenu dans tous les L_i, et donc dans leur intersection. Réciproquement, la définition des filtres entraine immédiatement que l'intersection d'un ensemble quelconque de filtres est encore un filtre. Donc on a simplement $\mathcal{F}il\big(\bigcup_\ell^\nearrow L_i\big) = \bigcap^\searrow \mathcal{F}il(L_i)$. Par ailleurs, si on a $U_i \in \mathcal{F}il(L_i)$ pour tout i, on a $\bigcup U_i \in \mathcal{F}il(\bigcup_\ell L_i)$, exactement par le même argument que pour l'union de deux filtres seulement.

Ici donc, considérons $\lambda_\infty = \lim^\nearrow \lambda_\ell(L_i)$, et pour tout i, soit U_i dans $\mathcal{F}il(L_i)$ avec $\lambda(U_i) \leqslant \lambda_\ell(L_i) + 2^{-i}\varepsilon$. Soit $V_i := \bigcup_{j \leqslant i} U_j$. J'affirme qu'on a $\lambda(V_i) \leqslant \lambda(L_i) + \sum_{j \leqslant i} 2^{-j}\varepsilon$. En effet, on a le lemme suivant:

Lemma 31. *Si $U, V \in \mathcal{F}il(L)$ avec $\lambda(U) \leqslant \lambda_\ell(L) + \varepsilon$ et $\lambda(V) \leqslant \lambda_\ell(L) + \eta$, alors $\lambda(U \cup V) \leqslant \lambda_\ell(L) + \varepsilon + \eta$.*

(Le lemme se prouve en observant que $U \cap V$ est encore dans $\mathcal{F}il(L)$, donc $\lambda(U \cap V) \geqslant \lambda_\ell(L)$; or $\lambda(U \cup V) = \lambda(U) + \lambda(V) - \lambda(U \cap V)$).

Bref, je me suis un peu embrouillé… □

Attention! De manière générale, il n'existe pas de complémentaire pour les lieux. Prenons par exemple le lieu L de l'ensemble des ouverts denses de E. Si M est un lieu non vide, alors tous les ouverts de $\mathcal{F}il(M)$ sont non vides, donc toute intersection d'un ouvert de $\mathcal{F}il(M)$ avec un ouvert de $\mathcal{F}il(L)$ (qui est dense) est non vide. Donc aucun ouvert non vide n'a d'intersection nulle avec L au sens des lieux. Ainsi le seul "complémentaire" possible de L serait $\emptyset_\ell$; or $L \cap_\ell \emptyset_\ell = L$, qui est distinct de E_ℓ (car $\mathcal{F}il(E_\ell) = \{E\}$).

Néanmoins,

Proposition 32. *Si X et Y sont des* boréliens *disjoints de E, alors $X \cap Y$ est lebasgue-négligeable, et même universellement négligeable (i. e., il serait négligeable pour tout autre mesure que celle de Lebesgue).*

Proof. On a dans ce cas $\lambda(X \cup Y) = \lambda(X) + \lambda(Y)$, donc $\lambda_\ell(X \cap_\ell Y) = \lambda_\ell(X_\ell) + \lambda_\ell(Y_\ell) - \lambda_\ell(X_\ell \cup_\ell Y_\ell) = \lambda(X) + \lambda(Y) - \lambda(X \cup Y) = 0$ (où, dans l'avant-dernière égalité, on a utilisé que $X_\ell \cup_\ell Y_\ell = (X \cup Y)_\ell$). □

Proposition 33. *Le lieu des ouverts de $\mathbb{R}$ de co-mesure nulle ("support de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$") est la réunion disjointe du support de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_-$ (filtre des ouverts de $\mathbb{R}$ dont l'intersection avec $\mathbb{R}_-$ est de co-mesure nulle) et du support de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.*

Ainsi, on sait bien couper une ficelle en deux au sens des filtres! ☺