# MONTE-CARLO & PROCESSUS ALÉATOIRES
# EXERCICES DU 30 MARS 2015

*par Rémi Peyre*

## EXERCICE 1 — Option d'échange

*Le but de cet exercice est de valoriser une option d'échange européenne par la méthode de Monte-Carlo. On considère deux actifs financiers appelés respectivement $A$ et $B$, et on note $A_t$ le cours de l'actif $A$ au temps $t$ (compté en années), resp. $B_t$ le cours de $B$.*

*On suppose que le couple $(A_t, B_t)$ évolue selon l'équation différentielle stochastique suivante :*

$$\begin{cases} dA_t = A_t \times \big(\sigma_{A1} dW_t^{(1)} + \sigma_{A2} dW_t^{(2)} + \tau \,/\, (1 + A_t \,/\, A^*) \times dW_t^{(3)} + \beta_A dt\big); \\ dB_t = B_t \times \big(\sigma_{B1} dW_t^{(1)} + \sigma_{B2} dW_t^{(2)} + \beta_B dt\big), \end{cases}$$

*avec*

$$\begin{pmatrix} \sigma_{A1} & \sigma_{B1} \\ \sigma_{A2} & \sigma_{B2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & -0{,}05 \end{pmatrix} \text{ an}^{-1/2}, \qquad \begin{pmatrix} \beta_A \\ \beta_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}06 \\ 0{,}04 \end{pmatrix} \text{ an}^{-1},$$
$$\tau = 0{,}20 \text{ an}^{-1/2}, \qquad A^* = 100 \text{ €},$$

*où $(W_t^{(1)})_t, (W_t^{(2)})_t, (W_t^{(3)})_t$ désignent trois mouvements browniens standard indépendants. On a en outre les conditions initiales $A_0 = 100$ €, $B_0 = 120$ €.*

**1.** Écrire un programme qui simule l'évolution des cours des actifs $A$ et $B$ sur une durée de 2 an par la méthode d'Euler stochastique. (On prendra un pas de temps égal à la demi-journée, càd. 730 pas de temps par an).

**2. (★)** Justifier que sous la mesure de probabilité risque-neutre, $(A_t, B_t)$ évolue selon l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dA_t = A_t \times \big(\sigma_{A1} d\tilde{W}_t^{(1)} + \sigma_{A2} d\tilde{W}_t^{(2)} + \tau \,/\, (1 + A_t \,/\, A^*) \times d\tilde{W}_t^{(3)} + r dt\big); \\ dB_t = B_t \times \big(\sigma_{B1} d\tilde{W}_t^{(1)} + \sigma_{B2} d\tilde{W}_t^{(2)} + r dt\big), \end{cases}$$

où $(\tilde{W}_t^{(1)})_t, (\tilde{W}_t^{(2)})_t, (\tilde{W}_t^{(3)})_t$ désignent trois (autres) mouvements browniens standard indépendants, et où $r$ désigne le taux d'intérêt sans risque, ici supposé constant égal à 0,02 an$^{-1}$.

*On considère maintenant une option dont la possession confère le droit suivant : à l'échéance $T = 2$ an, le détenteur peut s'il le souhaite acquérir une unité de l'actif $A$ en payant en échange une unité de l'actif $B$. La question qui va nous intéresser dans cet exercice est de savoir quel juste prix attribuer à cette option.*

**3. (✿)** Justifier que, au temps $T$ (ou, si vous préférez, juste avant le temps $T$), le juste prix de l'option est $(A_T - B_T)^+$.

**4.** Estimer l'espérance de $(A_T - B_T)^+$ sous la mesure de probabilité risque-neutre. (On pourra par curiosité comparer avec la valeur de cette espérance sous la vraie mesure de probabilité...). En déduire le juste prix de l'option (au temps initial).

## EXERCICE 2 — Estimation d'un écart-type

*L'objectif ultime de cet exercice est d'être capable d'estimer un écart-type par la méthode de Monte-Carlo,* en précisant un intervalle de confiance pour cette estimation. *Les questions 1 à 14 constituent une étude théorique qui sera ensuite appliquée dans les questions 15 et 16 ; en réalité, c'est l'étude théorique plus que son application qui constitue la partie le plus importante de l'exercice. L'étude théorique est elle-même divisée en deux phases : une phase simple avec une seule espérance (questions 1 à 6) pour se mettre en jambes, puis une phase plus complexe à k espérances (questions 7 à 14) dans laquelle on va généraliser la méthode de la phase simple.*

*Soit dans un premier temps $X$ une variable aléatoire réelle de classe $L^2$ ; on voudrait estimer $f(\mathbb{E}(X)) =: z$ à l'aide de la méthode de Monte-Carlo, où $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une certaine fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On désigne par $x_1, \dots, x_N$ $N$ réalisations indépendantes de la loi de $X$. On note $E[x] := N^{-1} \sum_{i=1}^N x_i$, $E[x^2] := N^{-1} \sum_{i=1}^N x_i^2$, etc. les* espérances empiriques *de $X$, resp. $X^2$, etc.*

**1.** Démontrer que la quantité

$$f(E[x]) =: \hat{z}$$

est, quand $N \to \infty$, un estimateur (fortement) convergent de $f(\mathbb{E}(X))$. Observer que la démonstration fonctionne en fait dès lors que $X$ est de classe $L^1$ et que $f$ est de classe $\mathcal{C}^0$.

*On voudrait maintenant déterminer la précision de l'estimateur $\hat{z}$. On supposera dans la suite de l'exercice que $f'(\mathbb{E}(X)) \neq 0$.*

**2.** Démontrer que, quand $N \to \infty$, la variable aléatoire

$$N^{1/2}(E[x] - \mathbb{E}(X))$$

converge en loi vers

$$\mathcal{N}(0, \mathrm{Var}(X)).$$

**3.** Démontrer que, quand $N \to \infty$, la fonction

$$\xi \mapsto N^{1/2}\big(f(\mathbb{E}(X) + N^{-1/2}\xi) - f(E(X))\big)$$

converge *localement uniformément* (au sens du lemme 1.10 du cours) vers la fonction linéaire

$$\xi \mapsto f'(\mathbb{E}(X))\xi.$$

*Indication :* Il suffit, pour démontrer la convergence localement uniforme, de montrer qu'il y a convergence uniforme sur tout intervalle centré sur 0.

**4.** Démontrer que, quand $N \to \infty$, la quantité $(E[x^2] - E[x]^2)$ est un estimateur (fortement) convergent de $\mathrm{Var}(X)$.

**5.** Démontrer que, quand $N \to \infty$, $f'(E[x])$ est un estimateur (fortement) convergent de $f'(\mathbb{E}(X))$.

**6. (★)** Déduire des questions 2 à 5 que, lorsque $N$ tend vers l'infini, la quantité

$$\frac{\hat{z} - z}{N^{-1/2}\hat{v}^{1/2}},$$

où

$$\hat{v} := (E[x^2] - E[x]^2) f'(E[x])^2,$$

converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.
*Indication :* On commencera par remarquer que, en vertu de la question 2, la convergence a lieu quand on remplace $(\hat{z}-z)$ par $f'(\mathbb{E}(X))(E[x]-\mathbb{E}(x))$ et qu'on remplace $E[x]$ par $\mathbb{E}(X)$ dans l'expression de $\hat{v}$. Ensuite, à l'aide du lemme 1.22 du polycopié et de la question 3, on verra que cela reste vrai si on garde le numérateur originel. Pour finir, on utilisera les questions 4 et 5 pour montrer qu'on peut aussi conserver le dénominateur originel.

*On va maintenant reproduire les questions 1 à 6, mais dans un cadre plus compliqué. Maintenant, on a $k$ variables réelles de classe $L^2$ $X^{(1)},\dots,X^{(k)}$ (pas forcément indépendantes), et on voudrait estimer $f(\mathbb{E}(X^{(1)}),\dots,\mathbb{E}(X^{(k)}))=:z$ par la méthode de Monte-Carlo, où $f\colon\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ est une certaine fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On désigne par $(x_1^{(1)},\dots,x_1^{(k)}),\dots,(x_N^{(1)},\dots,x_N^{(k)})$ $N$ réalisations indépendantes de la loi (jointe) de $(X^{(1)},\dots,X^{(k)})$ ; et comme précédemment, on désigne par $E[x^{(i)}]$ l'espérance empirique de $X^{(i)}$, etc.*

**7.** Démontrer que la quantité

$$f(E[x^{(1)}],\dots,E[x^{(k)}])=:\hat{z}$$

est, quand $N\to\infty$, un estimateur (fortement) convergent de $z$.

**8.** Démontrer que, quand $N\to\infty$, la variable aléatoire (vectorielle, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$)

$$N^{1/2}(E[x^{(1)}]-\mathbb{E}(X^{(1)}),\dots,\mathbb{E}[x^{(k)}]-\mathbb{E}(X^{(k)}))$$

converge en loi vers

$$\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathrm{Var}(X^{(1)}) & \mathrm{Cov}(X^{(1)},X^{(2)}) & \cdots & \mathrm{Cov}(X^{(1)},X^{(k)})\\ \mathrm{Cov}(X^{(1)},X^{(2)}) & \mathrm{Var}(X^{(2)}) & \cdots & \mathrm{Cov}(X^{(2)},X^{(k)})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathrm{Cov}(X^{(1)},X^{(k)}) & \mathrm{Cov}(X^{(2)},X^{(k)}) & \cdots & \mathrm{Var}(X^{(k)})\end{pmatrix}\right).$$

**9.** Démontrer que, quand $N\to\infty$, la fonction (de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$)

$$(\xi_1,\dots,\xi_k)\mapsto N^{1/2}\times \\ \big(f\big(\mathbb{E}(X^{(1)})+N^{-1/2}\xi_1,\dots,\mathbb{E}(X^{(k)})+N^{-1/2}\xi_k\big)-f(\mathbb{E}(X^{(1)}),\dots,\mathbb{E}(X^{(k)}))\big)$$

converge localement uniformément vers la fonction linéaire

$$(\xi_1,\dots,\xi_k)\mapsto\big(\big(Df\big)(\mathbb{E}(X^{(1)}),\dots,\mathbb{E}(X^{(k)}))\big)\cdot(\xi_1,\dots,\xi_k),$$

où je rappelle que

$$\big(\big(Df\big)(x_1,\dots,x_k)\big)\cdot(\xi_1,\dots,\xi_k):=\sum_{i=1}^k\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_k)\xi_i.$$

**10.** Démontrer que, quand $N\to\infty$, l'objet $\big(Df\big)(E[x^{(1)}],\dots,E[x^{(k)}])$ est un estimateur (fortement) convergent de la forme linéaire $\big(Df\big)(\mathbb{E}(X^{(1)}),\dots,\mathbb{E}(X^{(k)}))$.
*Indication :* Les « différentielles », càd. les objets de la forme $\big(Df\big)(x_1,\dots,x_k)$, sont des *formes linéaires* sur $\mathbb{R}^k$, càd. des applications linéaires de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$. Nous savons (cf. programme de CPGE) que l'ensemble de ces formes linéaires

est isomorphe[∗] à $\mathbb{R}^k$ lui-même : de fait, décrire $Df$ est équivalent à donner $\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_k$. Par conséquent, quand on dit « montrer que la différentielle converge vers ... », on peut comprendre « montrer que les dérivées partielles convergent respectivement vers ... ».

**11.** Démontrer que, quand $N \to \infty$, la matrice

$$\begin{pmatrix} E[(x^{(1)})^2] & E[x^{(1)}x^{(2)}] & \cdots & E[x^{(1)}x^{(k)}] \\ E[x^{(1)}x^{(2)}] & E[(x^{(2)})^2] & \cdots & E[x^{(2)}x^{(k)}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[x^{(1)}x^{(k)}] & E[x^{(2)}x^{(k)}] & \cdots & E[(x^{(k)})^2] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E[x^{(1)}]^2 & E[x^{(1)}]E[x^{(2)}] & \cdots & E[x^{(1)}]E[x^{(k)}] \\ E[x^{(1)}]E[x^{(2)}] & E[x^{(2)}]^2 & \cdots & E[x^{(2)}]E[x^{(k)}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[x^{(1)}]E[x^{(k)}] & E[x^{(2)}]E[x^{(k)}] & \cdots & E[x^{(k)}]^2 \end{pmatrix}$$

est un estimateur (fortement) convergent de la matrice

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Var}(X^{(1)}) & \operatorname{Cov}(X^{(1)}, X^{(2)}) & \cdots & \operatorname{Cov}(X^{(1)}, X^{(k)}) \\ \operatorname{Cov}(X^{(1)}, X^{(2)}) & \operatorname{Var}(X^{(2)}) & \cdots & \operatorname{Cov}(X^{(2)}, X^{(k)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{Cov}(X^{(1)}, X^{(k)}) & \operatorname{Cov}(X^{(2)}, X^{(k)}) & \cdots & \operatorname{Var}(X^{(k)}) \end{pmatrix}.$$

**12.** Déduire des questions précédentes que, lorsque $N$ tend vers l'infini, la quantité

$$\frac{\hat{z} - z}{N^{-1/2}\hat{v}^{1/2}},$$

où

$$\hat{v} := \sum_{i,j=1}^{k} (E[x^{(i)}x^{(j)}] - E[x^{(i)}]E[x^{(j)}]) \times \frac{\partial f}{\partial x^{(i)}}(E[x^{(1)}], \dots, E[x^{(k)}]) \frac{\partial f}{\partial x^{(j)}}(E[x^{(1)}], \dots, E[x^{(k)}])$$

converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$.

**13.** En déduire un intervalle de confiance judicieux au risque asymptotique $\alpha$ pour l'estimation de $z$ (l'intervalle étant centré sur $\hat{z}$).

**14. (✿)** Au fait, que peut-on faire pour estimer $z$ si les variables aléatoires $X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$ vivent sur des espaces probabilisés différents et n'ont donc pas de loi jointe... ?

**15.** Application : soit $X$ une variable aléatoire réelle de classe $L^4$, qu'on sache simuler ; écrire un algorithme de Monte-Carlo qui estime l'écart-type de $X$, en précisant l'intervalle de confiance au niveau 5 %.
*Indication :* Par rapport à l'étude théorique, on prendra $k = 2$, $X^{(1)} = X$, $X^{(2)} = X^2$, et $f(x_1, x_2) = (x_2 - x_1^2)^{1/2}$.

**16.** Appliquer l'algorithme écrit à la question précédente au cas où $X$ est le maximum de deux variables normales standard indépendantes.

[∗]. Quoique non canoniquement — à moins qu'on dispose d'une base canonique.

## EXERCICE 3 — Fluctuations d'un estimateur

*En statistique, une question récurrente est d'*estimer un paramètre *d'un modèle probabiliste dont on observe une réalisation. Pour les applications, il peut être essentiel d'être capable en outre de donner la* précision *de l'estimateur calculé, càd. de préciser un intervalle de confiance de la véritable valeur du paramètre... Nous allons voir que, pour ce faire, la méthode de Monte-Carlo peut être d'un grand secours, en nous offrant une méthode très générale pour déterminer la précision d'un estimateur. Dans cet exercice, nous appliquerons la méthode au cas d'école suivant* [†] *: on observe $k$ réalisations indépendantes $x_1, \dots, x_k$ d'une loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$ inconnu ; notre objectif est d'estimer $b$ ; et on s'appuie pour ce faire sur l'estimateur*

$$x^* + \frac{1}{k-1}(x^* - x_*) =: \hat{b},$$

*où*

$$x^* := \max\{x_1, \dots, x_k\}, \qquad \textit{resp.} \quad x_* := \min\{x_1, \dots, x_k\}.$$

*Plutôt qu'un simple estimateur, nous aimerions calculer une quantité $\bar{b}$ qui soit aussi proche que possible de $b$, mais telle que la probabilité que $b$ soit strictement supérieur à $\bar{b}$ soit très petite, disons inférieure à 1 %.*

*Notre démarche sera la suivante : nous allons essayer déterminer la valeur que la loi de $(b-\hat{b})$ n'a que 1 % de risque de dépasser. Pour ce faire, notre objectif sera ainsi de calculer certaines propriétés de cette loi, en supposant dans un premier temps $a$ et $b$* connus.

**1.** Écrire une fonction `F_fluct_spl` qui prend pour arguments $a$, $b$, $k$, un paramètre $x$ et un nombre $N$ de simulations, et qui estime

$$\mathbb{P}(b - \hat{b} \geqslant x)$$ [‡]

par la méthode de Monte-Carlo, avec $N$ simulations, en précisant un intervalle de confiance.

**2.** Modifier la fonction `F_fluct_spl` en une fonction `F_fluct`, où $x$, au lieu d'être un scalaire, sera un vecteur-ligne $(x_1, \dots, x_n)$ [§], et où la fonction renvoie son estimation du $n$-vecteur-ligne

$$\big(\mathbb{P}(b - \hat{b} \geqslant x_1), \dots, \mathbb{P}(b - \hat{b} \geqslant x_n)\big)$$

(sans préciser d'intervalle de confiance). On utilisera la technique de couplage naturelle (en quoi consiste-t-elle ?) pour évaluer les différentes probabilités.
*Indication :* Si `v` est un vecteur-ligne, la commande « `size (v, 2)` » [¶] permet de récupérer la taille de `v`.

**3. (★)** Modifier la fonction `F_fluct` en une fonction `F_fluct_hist`, de façon que (en supposant que les éléments de l'argument vectoriel $x$ sont rangés en ordre croissant) celle-ci trace l'histogramme de la loi estimée de $(b-\hat{b})$, avec $(n-1)$ classes

[†]. Même si, sur un cas aussi simple, on pourrait aussi faire une étude théorique...
[‡]. La notation « $\mathbb{P}$ » cache ici une dépendance implicite en $a$, $b$ et $k$.
[§]. Le nombre $n$ n'est pas fixé ; il sera déterminé par la donnée entrée par l'utilisateur.
[¶]. En langage Matlab, « `2` » peut signifier « colonnes » : en fait, on demande ici à Matlab de compter les colonnes de notre vecteur ; ce qui, dans le cas d'un vecteur-ligne, revient bien à déterminer sa taille.

délimitées par les valeurs $x_1, \dots, x_n$ [|||]. Tester la fonction avec $[a, b] = [0, 1]$, $k = 17$, $n = 51$, $x = [-0{,}5, -0{,}48, \dots, 0{,}5]$, et $N = 100\ 000$.
*Indication :* On utilisera la commande `rectangle` de Matlab pour tracer les rectangles des histogrammes.

**4. (★)** Quels sont les avantages à avoir utilisé un couplage dans notre calcul de Monte-Carlo, alors qu'on ne nous demande pas de déterminer d'intervalle de confiance ?
*Indication :* Il y a deux avantages. Le premier n'a rien à voir avec quelque question de précision que ce soit, et peut être interprété comme une simple astuce de programmation. Le second est bel est bien lié à une question de précision, notamment lors du tracé de l'histogramme : en particulier, si on n'avait pas couplé, on aurait risqué de voir des histogrammes "absurdes" ; voyez-vous en quoi... ?

**5. (★)** En vous inspirant des questions précédentes, écrire une fonction `Finv_fluct` qui prend comme arguments $a$, $b$, $k$, un quantile $q \in (0, 1)$ et un nombre $N$ de simulations, et qui renvoie un estimateur $\hat{x}$ de la valeur $x$ telle que

$$\mathbb{P}(b - \hat{b} \geqslant x) = q$$

**6. (★)** Considérant le calcul de $\hat{x}$, calculer un intervalle de confiance, non pas pour la valeur de $x$, mais pour le quantile auquel $\hat{x}$ correspond réellement [**] — autrement dit, pour la quantité

$$\mathbb{P}(b - \hat{b} \geqslant \hat{x}).$$

Observer que cet intervalle de confiance est en fait une fonction déterministe de $q$ et de $N$. En déduire que, si $N \geqslant 26\ 953$, on pourra garantir que le quantile à 1 % estimé de la loi de $(b - \hat{b})$ correspondra en fait, au pire (en tolérant un risque de 5 %), à un quantile à 1,1 %.

*Revenons à notre problématique initiale. Le souci est évidemment que, pour déterminer la loi de $(b - \hat{b})$ sous la véritable probabilité $\mathbb{P}$, il faudrait connaitre a et b, ce qui est stupide, dans la mesure où notre objectif est précisément d'estimer b... Cependant, nous ferons ici l'hypothèse* [††] *que la loi de $(b - \hat{b})$ dépend de a et b de façon suffisamment régulière pour que, en pratique, on puisse assimiler la loi de $(b - \hat{b})$ pour les véritables valeurs des paramètres $(a, b)$ à ce que cette loi serait pour les paramètres estimés $(\hat{a}, \hat{b})$, où $\hat{b}$ est l'estimateur de b précédemment défini, et*

$$\hat{a} := x_* - \frac{1}{k-1}(x^* - x_*).$$

**7.** En admettant la validité de la philosophie ci-dessus, écrire une fonction `b_conf` qui prend en argument $k$ ainsi que le $k$-vecteur-ligne $(x_1, \dots, x_k)$, et qui, outre $\hat{b}$, indique une valeur que le véritable $b$ n'a qu'un risque 1 % de dépasser.

**8.** Appliquer l'algorithme écrit à la question précédente au jeu de données sui-

[|||]. On ne tracera pas les classes extrêmes.
[**]. Par construction, nous savons que cette quantité vaudra à peu près $q$.
[††]. Cette hypothèse s'avère effectivement acceptable si $k$ est suffisamment grand.

vants : $k = 70$ et où les $x_i$ sont les valeurs

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3,226 370 | 5,395 582 | 8,714 468 | 8,774 130 | 2,249 314 | 8,820 235 | 8,711 721 |
| 4,898 460 | 7,443 683 | 2,122 203 | 4,384 296 | 8,376 850 | 7,378 432 | 8,730 516 |
| 6,275 438 | 1,264 044 | 7,838 505 | 8,524 419 | 6,461 291 | 7,099 850 | 6,981 784 |
| 4,145 585 | 6,273 314 | 2,359 023 | 6,682 032 | 1,232 694 | 3,213 638 | 1,348 585 |
| 1,760 473 | 7,631 015 | 6,591 367 | 3,538 365 | 8,655 588 | 1,253 815 | 4,521 562 |
| 4,059 356 | 7,162 705 | 7,402 619 | 2,485 805 | 4,933 932 | 4,576 861 | 6,199 239 |
| 6,708 856 | 7,075 171 | 3,206 381 | 6,469 111 | 6,270 244 | 2,289 716 | 1,937 205 |
| 5,003 439 | 8,732 549 | 3,726 577 | 5,705 840 | 2,784 367 | 7,047 532 | 3,037 214 |
| 5,064 810 | 6,625 702 | 8,176 143 | 8,728 892 | 5,398 282 | 2,095 838 | 2,182 075 |
| 3,056 718 | 7,770 514 | 3,030 644 | 7,556 874 | 2,943 698 | 8,486 192 | 3,804 153 |

## EXERCICE 4 — Le tournoi de tennis

*16 joueurs de tennis s'affrontent dans un tournoi à élimination directe, le tableau étant composé aléatoirement. Ces joueurs sont numérotés de #1 à #16, #1 étant le joueur le plus fort et #16 le plus faible. Lorsque le joueur #n dispute un match, son niveau au cours de cet match est aléatoire (car il y a des jours avec et des jours sans), suivant la loi $\mathcal{N}(-\log n; 0{,}5)$ — on décrit ici le « niveau » d'un joueur par un paramètre dans $\mathbb{R}$, d'autant plus grand que le joueur joue bien — : de la sorte, le joueur le mieux classé est celui qui a le plus de chances de gagner un match, mais le joueur le moins bien classé a ses chances quand même. Un exemple (tiré aléatoirement) de ce que peut donner un tel modèle de tournoi est donné dans l'illustration ci-dessous — je précise que dans notre modèle, le niveau d'un même joueur d'un match à l'autre est indépendant.*

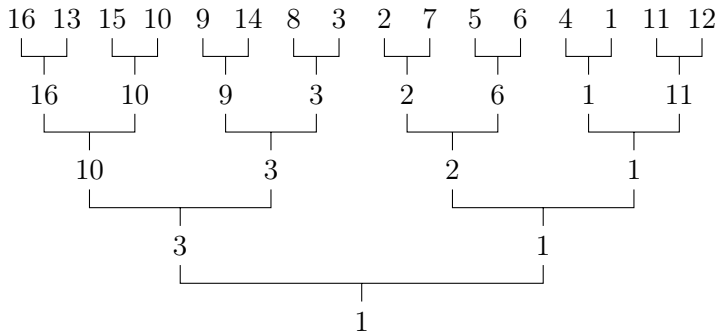


FIGURE 1 – Exemple de tournoi. Ici, il y a eu deux surprises au premier tour, où #16 a battu #13 et #6 a battu #5. Hélas pour #16 et #6, leur chance a ensuite tourné au second tour, où ils n'ont pas renouvelé leur performance (cela aurait d'ailleurs été d'autant plus difficile que leurs adversaires au second tour étaient plus redoutables qu'au premier). Plus généralement, à partir du second tour la hiérarchie a toujours été respectée, et en particulier c'est logiquement #1 qui s'est imposé. Notez que les hasards du tableau ont fait que #3 est arrivé en finale sans avoir eu à affronter d'adversaire mieux classé que lui, alors que #2 a été éliminé par #1 en demi-finale.

*Un bookmaker souhaite établir la cote du joueur #16 pour ce tournoi (le tableau n'ayant pas encore été tiré) ; pour cela, il a besoin de déterminer la probabilité, notée $p_{16}$, que ce joueur gagne.*

**1.** Implémenter un algorithme de Monte-Carlo pour évaluer $p_{16}$.

*Indication :* Un méthode particulièrement rapide pour tirer le tableau aléatoirement est l'algorithme de Fisher-Yates, dont on trouvera la description sur Wikipédia par exemple. Toutefois dans un premier temps je vous conseille de mettre au point vous-mêmes une méthode que vous compreniez bien, quitte à comparer ensuite avec ce qu'aurait donné Fisher-Yates.
*Indication :* Bien entendu, dès que #16 perd un de ses matchs, on sait qu'il ne gagnera pas le tournoi, de sorte qu'il n'est pas nécessaire de simuler ce qui se passe après. Au fait, à quelle technique de réduction de la variance s'apparente cette observation ?
*Indication :* Notez que, quitte à changer la représentation des branches du tableau, on peut toujours supposer que #16 est le joueur situé tout à gauche du tableau.

*La convergence de l'algorithme étant très lente, notre bookmaker souhaite améliorer sa précision.*

**2.** Implémenter une technique de réduction de la variance par variables antithétiques. Évaluer le gain d'efficacité.

**3.** Implémenter un échantillonnage préférentiel dans lequel le joueur #16 est "survolté" et se comporte toute la semaine comme s'il avait le niveau $l$. (on pourra prendre $l = -\log 8$ pour l'application). Évaluer le gain d'efficacité.

**4.** Implémenter une technique de conditionnement où on conditionne par rapport à tous les matches dans lesquels on est sûr que #16 ne jouera pas. Pour calculer exactement la probabilité de victoire conditionnelle de #16, on utilisera la fonction `erfinv`. Évaluer le gain d'efficacité.
*Indication :* La fonction `erfinv` étant relativement gourmande en calcul, on s'efforcera de suivre une méthode d'implémentation qui minimise le nombre de recours à celle-ci.

**5.** Implémenter une technique de stratification par rapport à l'identité du plus fort joueur dans la moitié de tableau de #16, selon qu'il s'agit de #1, #2, #3, #4 ou d'un joueur plus faible. Évaluer le gain d'efficacité.
*Indication :* Vous pouvez choisir, soit de stratifier "à postériori" en procédant à un échantillonnage uniforme, soit d'optimiser l'échantillonnage inter-strates. Dans ce dernier cas, vous avez besoin de stratifier "à priori", càd. de savoir tirer un tableau uniformément à l'intérieur d'une strate donnée : comment feriez-vous pour cela ?

**6.** Implémenter une technique de réduction de la variance par variables de contrôle en utilisant pour variables de contrôle le niveau réel auquel #16 a joué lors de chacun de ses quatre matchs (ou aurait joué s'il avait été qualifié). Évaluer le gain d'efficacité.