Complément de cours *:

Valuation d'une option européeenne par la méthode de Monte-Carlo

Rémi Peyre

30 mars 2015

1 Options financières

1.1 Concept d'option

En finance, une *option* est un *droit* dont dispose le propriétaire de l'option concernant une opération financière, cette opération étant relative à un actif financier alors qualifié de *sous-jacent*.

L'exemple le plus simple est celui d'une *option d'achat* (ou « *call* »). Imaginons ainsi que vous soyez un fabricant de routes, qui sait qu'il aura besoin d'une quantité importante de bitume dans un an. Stocker le bitume engendrerait des couts prohibitifs, mais simplement l'acheter « à terme » (càd., en l'occurrence, dans un an) présente un risque financier, dû à la grande variabilité des cours du bitume, risque que votre entreprise n'est pas prête à supporter. Vous pourriez éventuellement choisir d'acheter un *contrat à terme* (ou « *future* »), càd. une promesse de vente avec livraison *dans un an* mais pour un prix déterminé *dès maintenant* ; néanmoins, vous pensez qu'il y a une forte probabilité que le cours du bitume chute violemment, et vous n'avez pas envie de vous retrouver comme un âne à avoir payé votre bitume deux fois plus cher que si vous l'aviez acheté à terme... Que faire ? Eh bien, vous pouvez acheter une option d'achat sur le bitume, qui est en quelque sorte une *assurance* contre l'augmentation des cours du bitume... Une telle action d'achat vous donnera le *droit* (mais pas l'obligation !) d'acheter, dans un an (ce qu'on appelle la *maturité* de l'option), une certaine quantité de bitume à un prix *fixé à l'avance*, prix appelé *prix d'exercice* (ou « *strike* »).

Par exemple, si votre option vous donne le droit d'acheter le bitume à 20 000 schpountz la tonne, et que le cours du bitume dans un an vaut en réalité 10 000 schpountz la tonne, vous vous contenterez de ne pas exercer votre option ; à contrario, si le cours du bitume est monté jusqu'à 25 000 schpountz la tonne, en exerçant votre action vous pourrez alors l'acquérir à 20 000 schpountz la tonne malgré tout [*], réalisant ainsi une économie de 5 000 schpountz par tonne, sans laquelle votre entreprise aurait risqué de faire faillite devant la flambée des cours !...

Il existe une très grande variétés de types d'options, en fonction de la nature précise du droit que le détenteur de l'option acquiert. On peut distinguer deux aspects particuliers dans la nature de l'option :

---

*Hors-programme

[*]. Dans la limite, bien entendu, de la quantité prévue par votre option !

- Le *type* de droit acquis : est-ce une droit à l'achat (« call ») ? Un droit à la vente (« pull ») ? Un "pari" sur l'état du marché [†] ? Etc.
- Le *moment* où on peut exercer ce droit : par exemple, pour une option d'achat, peut-on exercer l'option seulement à un moment bien précis ? (« option *européenne* »). N'importe quand jusqu'à une certaine échéance ? (« option *américaine* ») ? Dans une plage de temps fixée ? Etc.

Les types d'options les plus classiques sont les options d'achat ou de vente, européennes ou américaines. Elles sont surnommées collectivement les « option vanille » [‡]. Mais il existe aussi d'autres options dites « exotiques », et surnommées de noms idoines : bermudéennes, bahaméennes, ...

1.2 L'enjeu de ce document

Une question importante, lorsqu'on veut acquérir (ou vendre) une option, est de connaitre son "juste" prix. Pendant longtemps, ce « juste prix » été déterminé par une bonne dose de pifomètre... Cependant, lorsque les mathématiciens se sont penchés sur une analyse plus fine des marchés financiers, ils se sont aperçus que, dans bon nombre de cas, il n'y avait qu'un seul prix qu'on pouvait raisonnablement considérer comme « juste » sans entrainer d'incohérences. Sur le coup, cela peut surprendre : pourquoi le prix d'un *nouveau* produit financier serait-il "déterminé" par autre chose que la loi de l'offre et la demande ? Mais à bien y réfléchir, on s'aperçoit que ce n'est pas si étonnant que ça : en effet, l'option n'est pas à proprement parler un *bien* ; elle porte sur l'actif sous-jacent qui a *déjà* un prix... ! Il n'est donc pas illogique qu'il y ait des liens entre le prix d'une option et le prix de son sous-jacent ; le plus surprenant est plutôt que ce lien soit si fort qu'il ne laisse (dans les cas les plus simples) *aucune* ambigüité sur le juste prix de l'option.

Déterminer, par une étude mathématique, le juste prix d'une option est appelé *valoriser* (ou « *pricer* ») cette option.

Ici, nous allons nous limiter au cas le plus simple, celui des options *européeennes*, qui sont les plus faciles à valoriser. Nous verrons que la méthode de Monte-Carlo s'avère très utile pour mener les calculs à bien.

2 Fondements des mathématiques financières

2.1 Hypothèses essentielles

Les mathématiques financières "classiques" reposent sur un certain nombre d'hypothèses simplificatrices qu'il est important de garder à l'esprit lorsqu'on les applique dans un cadre réel. Ces hypothèses sont notamment les suivantes :

- Les agents du marché agissent de manière rationnelle. (Ce n'est qu'à moitié vrai en pratique : si on voit rarement des comportements carrément aberrants, on sait que des effets psychologiques amènent parfois les opérateurs de marché à avoir, à grande échelle, des comportements non optimaux...).
- Les agents du marché disposent tous des mêmes informations quant aux produits qu'ils s'échangent. (Là encore, en pratique, la guerre de l'information fait rage dans la finance, même si elle se solde souvent par un match nul...).

[†]. Par exemple, on gagne 1 € si le cours de telle option dépasse 150.

[‡]. Par allusion aux crèmes glacées : le parfum "de base", celui qu'on vous propose en premier, c'est toujours la vanille... ! ☺

- Vous n'avez aucune influence sur les cours des actifs financiers : que vous les vendiez ou les achetez, leur prix continue d'évoluer comme si de rien n'était. (Cela est d'autant plus vrai que vous êtes petit : si vous êtes Jérôme Kerviel et que vous avez pris des positions pour 50 G€, nul doute que clôturer toutes ces positions ensemble va influer sur l'équilibre entre l'offre et la demande...).
- On peut diviser un actif en parties aussi petites qu'on veut. (C'est faux en théorie, car on ne peut pas diviser une action d'une entreprise, mais en pratique, les banques manipulent des quantités si importantes que le caractère discret des volumes échangés n'apparait guère).
- On peut acheter des quantités aussi grandes qu'on veut de n'importe quel actif. (Là encore, c'est vrai en pratique si vous boursicotez avec vos économies personnelles, mais faux si vous vous appelez Jérôme Kerviel...).
- Quand on veut vendre (ou acheter) un actif, on trouve instantanément une contrepartie prête à l'acheter (ou à la vendre) au cours du marché, quel que soit le volume demandé. (Cela est essentiellement vrai pour les actifs très « liquides », qui s'échangent énormément sur le marché [l'action *Apple*, par exemple], mais complètement faux sur d'autre produits plus spécifiques [la vente d'une œuvre d'art, par exemple]).
- On peut vendre, ou acheter, une option instantanément. (C'est quasiment vrai à l'heure actuelle, où les temps de passage des ordres s'expriment en microsecondes... Certaines autorités politiques remettent cependant la légalité de cette possibilité en question).
- Lorsqu'on réalise une transaction boursière, l'argent circule en vase clos entre le vendeur et l'acheteur ; aucun tiers ne prend de taxe. (C'est quasiment vrai à l'heure actuelle, car les frais de fonctionnement des marchés sont très minimes par rapport aux volumes échangés... Néanmoins, on parle de plus en plus de taxer les transactions financières [taxe dite « Tobin »], et certaines places boursières ont déjà mis de telles taxes en place. Ces taxes restent néanmoins modérées, et leur effet est souvent peu sensible pour les applications à la valorisation).
- On peut créer, et il existe sur le marché, des options arbitrairement compliquées sur tout et n'importe quoi. (C'est raisonnablement vrai en pratique, surtout depuis que le développement des techniques de valorisation a rendu les gens plus enclins à s'échanger des options).

2.2 Notion de numéraire

Quand on s'intéresse à la *valeur* d'une option, càd. en substance à son prix, ce prix est exprimé à partir d'une certaine quantité de base, par exemple en euros. Il est important de comprendre ici que l'euro lui-même n'est pas une quantité absolue, et que sa valeur peut elle-même fluctuer au cours du temps : en fait, le choix d'une unité de référence n'est qu'on question de *convention* ! Même des valeurs « refuge » comme l'or ou le dollar peuvent s'apprécier ou se déprécier, à la faveur de la découverte d'une nouvelle application industrielle majeur de l'or, ou d'une émission massive de monnaie par la banque centrale étatsunienne...

Le produit financier qu'on prend pour référence pour mesurer le prix des autres produits financiers est appelé le *numéraire*. En général, c'est une monnaie, mais cela pourrait très bien être un métal, une action d'une société, ou un produit composite...

Une particularité des monnaies actuelles est que la création monétaire ne repose que sur un jeu d'écritures comptables des banques centrales. Ainsi, la masse monétaire existante tend à augmenter en permanence, à mesure que de la monnaie est créée. Si, par exemple, vous disposez actuellement de 100 €, vous pouvez vous *assurer* (si vous êtes une banque) d'avoir 102 € l'an prochain : il vous suffit pour ce faire de "prêter"ces 100 € à la banque centrale européenne, en supposant que celle-ci pratique un taux d'intérêts annuel de 2 %. Ce prêt ne présente absolument *aucun* risque, car les 2 € supplémentaires que la BCE vous rendra ne proviendra pas d'une *création de richesse* (toujours sujette à l'aléa) mais d'une écriture comptable. À l'inverse, lorsque vous possédez une tonne de cuivre, vous n'avez aucun moyen de garantir d'en avoir 1 020 kg l'an prochain : d'ailleurs, la quantité de cuivre présente sur Terre est fixée, et on ne peut donc pas en créer ex nihilo...

Le rendement du numéraire par prêt à la banque centrale est appelé le *taux sans risque*. Dans les modèles que nous considèrerons, nous supposerons que ce taux sans risque est fixé et constant dans le temps. (En pratique, ce n'est pas vrai au-delà de quelques mois, car les banques centrales tentent de réguler l'économie en ajustant leurs taux directeurs...).

2.3 Deux théorèmes essentiels

On peut démontrer par le raisonnement que, lorsque les hypothèses que vous avons faites ci-dessus sont vérifiées, certaines propriétés du marché s'ensuivent :

La première de ces propriétés est l'*absence d'opportunité arbitrage*. Cela signifie qu'il n'existe pas de moyen de dégager un bénéfice *à coup sûr* par le biais d'opérations financières. Imaginez ainsi qu'à un moment donné, la tonne de cuivre s'échange à 2 000 € sur la marché européen et à 2 100 $ sur le marché américain, et que l'euro s'échange contre 1,1 $. Si vous avez 1 000 € en poche, vous pouvez alors les échanger contre 1 100 $, acheter avec cet argent 524 kg de cuivre sur le marché américain, puis les revendre sur le marché européen pour 1 048 €... Tout cela étant fait instantanément au cours du marché, dont sans aucun risque pour vous, avec un bénéfice assuré de 48 euros ! Notez que ces 48 euros ont été gagnés en temps nul ; il ne s'agit donc pas d'un phénomène de création monétaire. Autre exemple : à un moment donné, un acheteur est prêt à vous payer une promesse de vente à terme (disons, dans un an) pour du pétrole à 70 $ le baril, tandis qu'un vendeur veut bien vous céder une promesse de vente pour la même échéance à 65 $ le baril (on suppose que cette promesse de vente est parfaitement sure, car par exemple dument garantie par un autre bien). Vous vendez alors pour 1 M$ de promesses de vente à votre acheteur (à qui vous promettez donc de fournir 14 286 barils à terme) ; avec ce million de dollar, vous achetez 15 385 barils de pétrole à terme ; le jour du terme, vous utilisez les barils fournis par votre vendeur en vertu de sa promesse pour honorer la promesse faite à votre acheteur, et vous restez avec 1 099 barils de pétrole pour vous, sans avoir encouru le moindre risque...

La théorème d'absence d'opportunité d'arbitrage affirme que de telles choses ne se produisent pas, car il ne serait pas rationnel de la part des acteurs du marché de laisser une telle situation se produire. En pratique, ce qui se passe est que dès qu'une opportunité d'arbitrage pointe son nez, lorsque certaines acteurs du marché (les « arbitragistes ») tentent de l'exploiter,l'exploitation de l'arbitrage va très rapidement annuler l'arbitrage par le jeu de l'offre et de la demande ! Dans le première situation, par exemple, à force d'acheter des dollars, le cours du dollar contre l'euro va monter, à force d'acheter du cuivre sur le marché américain, le cours du cuivre en dollars va monter, et à force de vendre du cuivre sur le marché européen, le cours du cuivre sur le marché européen va descendre... Tout cela concourant à supprimer l'opportunité d'arbitrage. De même dans la seconde situation ; quand votre acheteur va se rendre compte que tout le monde est prêt à lui fournir des promesses de vente pour 70 \$, il va tôt faire d'augmenter ses exigences en n'en demandant que 65 \$, ou vice-versa pour le vendeur...

La seconde propriété qui nous intéresse, centrale pour la suite de ce document, est l'existence d'une mesure martingale pour le prix des actifs. Ce théorème s'énonce ainsi :

Théorème. *Considérons une modélisation probabiliste de l'évolution d'un marché financier, les actifs de base étant suivant les cours stochastiques $A_1(t), \dots, A_k(t)$ au fil du temps (lorsqu'on les exprime dans une certaine unité numéraire). Soit $\mathbb{P}$ la loi d'évolution de ce processus. Alors il existe une loi Q qui porte sur les mêmes processus, telle que Q est à densité par rapport à $\mathbb{P}$ et vice-versa*[§] *lorsqu'on restreint l'évolution des processus à un intervalle compact $[0, T]$* [¶]*, telle que, sous la loi Q, les processus $A_i(t) \,/\, e^{rt}$ sont tous des martingales, où r désigne le taux sans risque du numéraire choisi.*

En outre, on peut aussi choisir la mesure Q telle qu'on ait aussi la propriété suivante : pour toute option O sur le marché considéré, l'évolution du cours de l'option $O(t)$ vérifie elle aussi que $O(t)/e^{rt}$ est une martingale, tant qu'il n'est pas rationnel d'exercer l'option*, càd. en pratique tant que le bénéfice obtenu en exerçant l'option immédiatement est inférieur au prix de revente de l'option. La mesure Q est alors unique ; on l'appelle la mesure* risque-neutre*.*

3 Valorisation d'une option européenne

Dans le cas d'une option européenne, on ne peut pas exercer l'option avant la date de maturité. Par conséquent, d'après la définition de la mesure risque-neutre,

Proposition. *Si T est la maturité d'une option européenne O, le processus $(O(t) \,/\, e^{rt})_t$ est une martingale sur $[0, T]$.*

Ce qui est intéressant, c'est qu'il est très facile en général de déterminer la juste valeur de $O(T)$. Prenons par exemple le cas d'une option de vente V qui, à l'échéance, vous permet de céder un actif A pour le montant K. Supposons que nous arrivions juste à l'échéance, appelée T. Quelle est alors la juste valeur de V ? Clairement, si au temps T le cours A_T de l'actif est supérieur à K, il serait stupide d'exercer votre option pour le vendre au montant K, alors que vous pouvez le vendre directement sur le marché pour une valeur supérieure ! Dans un tel cas, la valeur O_T de l'option au temps T est donc... nulle. Par contre, si A_T est inférieur à K, nous pouvons acheter une action sur le marché pour la valeur A_T pour la revendre immédiatement à la valeur K en exerçant notre option, réalisant ainsi un bénéfice sans risque de $K - A_T$. Puisqu'il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage, cela signifie

[§]. En termes techniques, on dit que Q est *équivalente* à $\mathbb{P}$; et cela est équivalent à dire que $\mathbb{P}$ et Q ont les mêmes ensembles de mesure nulle

[¶]. Cette précision est simplement une nécessité technique qui n'a pas de signification profonde. De toutes façons, en pratique, on ne s'intéresse jamais à un horizon réellement infini dans l'étude d'un marché financier, tout au plus à l'échelle d'un siècle ou deux...

que le juste prix de l'option est précisément $K - A_T$: en dessous, on aurait un arbitrage en achetant l'option pour l'exercer immédiatement ; au-dessus, on aurait un arbitrage en créant de nouvelles options pour les vendre, en finançant l'exercice de l'option sur le marché.

Au final, dans le cas de notre option de vente, on a :

$$O_T = (K - A_T)^+.$$

Il est très facile, par un raisonnement analogue, de déterminer le juste prix de n'importe quelle option européenne à son moment d'exercice.

Par conséquent, en utilisant le théorème d'arrêt pour une martingale, on peut en déduire la seule valeur cohérente — et donc le juste prix — pour notre option au temps actuel (que nous appellerons 0) :

$$O_0 = \mathbb{E}_Q(O_T \,/\, e^{rT}).$$

Dès lors, si nous savons déterminer Q, nous saurons déterminer le juste prix de n'importe quelle option ; et si nous savons simuler cette loi, nous pourrons utiliser la méthode de Monte-Carlo pour calculer numériquement notre espérance sous Q...

Or, lorsque l'évolution du marché est régie par des équations différentielles stochastiques [||], on peut dans certains cas [**] déterminer la mesure risque-neutre à partir de la seule connaissance des caractéristiques du marché.

Pour cela, on utilise le lemme suivant :

Lemme. *Soit* $\vec{X}_t \in \mathbf{R}^n$ *un processus évoluant stochastiquement selon une équation de la forme :*

$$d\tilde{X}_t = \mathbf{\Sigma}_t d\tilde{W}_t + \vec{b}_t dt,$$

où $\mathbf{\Sigma}_t$ *est* n'importe quel [††] *processus à valeurs dans* $\mathbf{R}^{n\times n}$ *et* $\vec{b}_t$ *n'importe quel processus à valeurs dans* $\mathbf{R}^n$*.*

Alors il existe une fonction déterministe *qui, à partir de la trajectoire* $(\vec{X}_u)_{u\in[0,t]}$*, donne presque-sûrement la valeur de* $\Sigma_t\Sigma_t^\mathsf{T}$ [‡‡]*.*

Autrement dit, on peut "lire" la valeur du bruit sur la trajectoire d'un processus évoluant d'après une ÉDS *!*

Par conséquent, dans le cas le plus simple où le taux sans risque serait nul et où le marché serait constitué d'un unique actif A évoluant suivant l'ÉDS

$$dA_t = \sigma dW_t + b dt,$$

où σ et b sont des constantes, l'évolution de A_t sous la mesure risque-neutre est *nécessairement*

$$dA_t = \sigma dW_t.$$

[||]. Hypothèse plus que douteuse en pratique, car les véritables marchés présentent toujours des sauts... En pratique, les formules de valorisation des options sont plutôt utilisées comme une *heuristique* pour avoir une *idée* (mais une idée *quantitative*, précise) du juste prix de l'option.

[**]. Attention ; ce n'est valable que pour une certaine forme d'équations différentielles stochastiques : en fait, il faut que l'évolution du cours du marché soit *autonome*, càd. qu'aucune quantité autre que les $A_i(t)$ (et t) n'entre en jeu dans les équations d'évolution du système.

[††]. En particulier, on ne suppose pas que $\mathbf{\Sigma}_t$ soit adapté par rapport à la filtration de X_t... ! Il y a juste quelques hypothèses techniques de régularité que je passe ici sous le tapis : une façon de formuler ces hypothèses est d'imposer, par exemple, que X_t soit une fonction continue du temps presque-sûrement.

[‡‡]. Rappelons qu'il serait illusoire de vouloir déterminer $\mathbf{\Sigma}_t$ *lui-même*, dans la mesure où la loi du processus ne dépend de $\mathbf{\Sigma}_t$ qu'à travers $\Sigma_t\Sigma_t^\mathsf{T}$.

En effet, en admettant (mais cela parait raisonnable) que A_t suivra aussi une équation différentielle stochastique sous Q, le bruit de cette ÉDS sera forcément le même que pour l'ÉDS de base, car nous observerons les mêmes trajectoires (quoiqu'avec des probabilités différentes) d'après l'équivalence des mesures $\mathbb{P}$ et Q ? Quant au terme de dérive, il sera forcément nul, sinon A_t ne suivrait plus une martingale...