

PROCESSUS ALÉATOIRES
CORRIGÉ DE L'EXERCICE N° 1 DU 9 MARS 2015
par Rémi Peyre

Corrigé de la question 1. À chaque instant $[t, t + dt]$ la probabilité de faire un saut d'amplitude x (à dx près) est $\mathbf{1}_{\{|x| \geq \varepsilon\}} |x|^{-1-\alpha} dx dt$, donc la probabilité de faire un saut tout court est simplement l'intégrable de cette quantité par rapport à x , soit λdt , où

$$\lambda = \int_{x \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{|x| \geq \varepsilon\}} |x|^{-1-\alpha} dx.$$

λ est ainsi la masse totale de la mesure de densité de saut ^[*] ^[†] ^[‡].

On calcule que

$$\begin{aligned} \lambda &= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} (-x)^{-1-\alpha} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} x^{-1-\alpha} dx \\ &= 2 \int_{\varepsilon}^{+\infty} x^{-1-\alpha} dx = 2 \left[-\frac{x^{-\alpha}}{\alpha} \right]_{\varepsilon}^{+\infty} = \frac{2\varepsilon^{-\alpha}}{\alpha}. \end{aligned}$$

Quant à l'indépendance des instants de sauts, elle vient simplement du caractère markovien du processus qui dit que la probabilité d'un saut imminent ne dépend du passé que via le point où l'on est, et du fait que la densité de probabilité de saut est la même quel que soit le point où l'on est. \square

Corrigé de la question 2. Outre les programmes ci-joints, rappelons juste comment on peut simuler une loi exponentielle par la méthode de la fonction de répartition (complémentaire). Par définition d'une loi exponentielle de paramètre λ , on a $\mathbb{P}(\cdot \geq x) = e^{-\lambda x}$. Si je veux maintenant transporter la loi *Uniforme* $([0, 1])$ vers la loi exponentielle par une fonction *décroissante*, il faudra que j'envoie p sur le point qui a une probabilité p d'être dépassé, càd. la point x tel que $e^{-\lambda x} = p$, autrement dit

$$x = -\log(p) / \lambda.$$

On simulera donc notre loi exponentielle par $-\log(U) / \lambda$, où U suit la loi *Uniforme* $([0, 1])$. \square

Corrigé de la question 3. Quel que soit l'instant où l'on saute et quoi qu'il se soit passé avant, la loi conditionnelle de l'amplitude de notre saut est exactement la même : c'est la probabilité qu'on avait de faire exactement ce saut divisée par la probabilité de sauter tout court. Autrement dit, la probabilité conditionnelle que notre saut arrive en x (à dx) près vaut

$$\frac{\mathbf{1}_{\{|x| \geq \varepsilon\}} |x|^{-1-\alpha} dx dt}{\lambda dt},$$

ce qui est bien égal à la valeur $d\mu(x)$ indiquée par l'énoncé. \square

[*]. Dans mon cours magistral, j'ai parlé de « mesure de saut » : il serait plus rigoureux de parler de « mesure de *densité* de saut », dans la mesure où cette mesure décrit la probabilité de faire tel ou tel saut *par unité de temps*.

[†]. Dans mon cours magistral, je décrivais les sauts par leur point d'arrivée ; ici je les décris plutôt par leur amplitude, mais bien entendu le principe est exactement le même.

[‡]. Dans mon cours magistral, la mesure de densité de saut était définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, càd. que je considérais qu'il ne pouvait pas y avoir de sauts d'amplitude nulle (qui ne seraient pas de vrais sauts!), mais rien n'empêche d'étendre cette mesure sur \mathbb{R} en donnant une densité arbitraire (et généralement nulle, comme ici) à la probabilité de faire un « saut sur place ».

Corrigé de la question 4. Outre le programme ci-joint, il faut d'abord trouver la formule pour simuler μ ... Nous commençons par remarquer que la loi de μ est clairement symétrique par rapport à l'origine : ce fait, pour ne pas nous ennuyer avec les valeurs absolues, nous allons simuler d'une part un signe aléatoire uniforme, et d'autre part, indépendamment de ce signe, une variable suivant la loi de la valeur absolue de μ . Cette dernière est évidemment la loi sur \mathbb{R}_+ , notée $\mu^|$, de densité

$$d\mu^|(x) = 2\lambda^{-1}\mathbf{1}_{\{x \geq \varepsilon\}}x^{-1-\alpha}dx.$$

Appliquons la méthode de la fonction de répartition : pour $x \geq \varepsilon$, on a :

$$\mu^|(\cdot \geq x) = \int_x^{+\infty} 2\lambda^{-1}y^{-1-\alpha}dy = \frac{\alpha}{\varepsilon^{-\alpha}} \left[-\frac{y^{-\alpha}}{\alpha} \right]_x^{+\infty} = \left(\frac{x}{\varepsilon} \right)^{-\alpha}.$$

Et pour avoir $(x/\varepsilon)^{-\alpha} = p$, il faut que $x = \varepsilon p^{-1/\alpha}$, ce qui nous permet finalement de simuler $\mu^|$ par la méthode de la fonction de répartition. \square

Corrigé de la question 7. La densité de $\tilde{\mu}$ par rapport à μ au point x est évidemment

$$\frac{\lambda}{Z} \exp(-(x/y_1)^2),$$

qui est uniformément bornée par λ/Z . Par conséquent, pour tirer $\tilde{\mu}$ par rejet par rapport à μ , il suffit de tirer un couple indépendant (X, U) avec X de loi μ et U de loi $Uniforme([0, 1])$, de l'accepter si $U \leq e^{-(x/y_1)^2}$ [§], et de le rejeter pour recommencer l'opération sinon. \square

Corrigé de la question 8. Pour connaître la densité relative de la loi de la simulation non tildée du processus par rapport à sa version tildée, nous partons de l'observation que ces deux simulations sont produites de la même manière à partir d'une suite d'aléas, correspondant aux temps d'attentes et aux amplitudes de sauts, aléas qui sont indépendants pour chacune des deux simulations; on pourra donc calculer la densité relative comme le produit des densités de chaque aléa tiré. Les deux processus ayant la même intensité de saut, les temps d'attente ont la même loi, donc ne contribuent pas à la densité relative; il y a donc juste à tenir compte des lois des amplitudes de sauts : on trouve ainsi que la densité relative des processus est simplement le produit des $Z/\lambda \times \exp(-(x_i/y_1)^2)$, où les x_i notent les amplitudes des sauts simulés. \square

[§]. Le moment de droite « $e^{-(x/y_1)^2}$ » s'obtient en divisant la densité $(d\tilde{\mu}/d\mu)(x)$ par son majorant (λ/Z) .