MÉTHODES DE MONTE-CARLO
EXERCICES DU 7 AVRIL 2014

par Rémi Peyre

EXERCICE 1 — Le tournoi de tennis

16 joueurs de tennis s'affrontent dans un tournoi à élimination directe, le tableau étant composé aléatoirement. Ces joueurs sont numérotés de #1 à #16, #1 étant le joueur le plus fort et #16 le plus faible. Lorsque le joueur #n dispute un match, son niveau au cours de cet match est aléatoire (car il y a des jours avec et des jours sans), suivant la loi $\mathcal{N}(-\log i; 0{,}5)$ — on décrit ici le « niveau » d'un joueur par un paramètre dans $\mathbb{R}$, d'autant plus grand que le joueur joue bien — : de la sorte, le joueur le mieux classé est celui qui a le plus de chances de gagner un match, mais le joueur le moins bien classé a ses chances quand même. Un exemple (tiré aléatoirement) de ce que peut donner un tel modèle de tournoi est donné dans l'illustration ci-dessous — je précise que dans notre modèle, le niveau d'un même joueur d'un match à l'autre est indépendant.

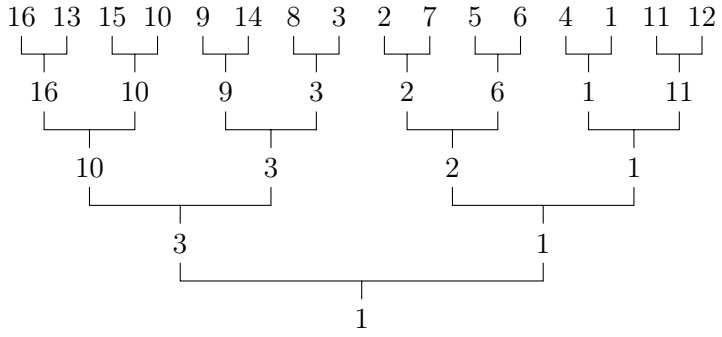

FIGURE 1 – Exemple de tournoi. Ici, il y a eu deux surprises au premier tour, où #16 a battu #13 et #6 a battu #5. Hélas pour #16 et #6, leur chance a ensuite tourné au second tour, où ils n'ont pas renouvelé leur performance (cela aurait d'ailleurs été d'autant plus difficile que leurs adversaires au second tour étaient plus redoutables qu'au premier). Plus généralement, à partir du second tour la hiérarchie a toujours été respectée, et en particulier c'est logiquement #1 qui s'est imposé. Notez que les hasards du tableau ont fait que #3 est arrivé en finale sans avoir eu à affronter d'adversaire mieux classé que lui, alors que #2 a été éliminé par #1 en demi-finale.

Un bookmaker souhaite établir la cote du joueur #16 pour ce tournoi (le tableau n'ayant pas encore été tiré) ; pour cela, il a besoin de déterminer la probabilité, notée p_{16}, que ce joueur gagne.

1. Implémenter un algorithme de Monte-Carlo pour évaluer p_{16}.

Indication : Un méthode particulièrement rapide pour tirer le tableau aléatoirement est l'algorithme de Fisher-Yates, dont on trouvera la description sur Wikipédia par exemple. Toutefois dans un premier temps je vous conseille de mettre au point vous-mêmes une méthode que vous compreniez bien, quitte à comparer ensuite avec ce qu'aurait donné Fisher-Yates.

Indication : Bien entendu, dès que #16 perd un de ses matchs, on sait qu'il ne gagnera pas le tournoi, de sorte qu'il n'est pas nécessaire de simuler ce qui se passe après. Au fait, à quelle technique de réduction de la variance s'apparente cette observation ?

Indication : Notez que, quitte à changer la représentation des branches du tableau, on peut toujours supposer que #16 est le joueur situé tout à gauche du tableau.

La convergence de l'algorithme étant très lente, notre bookmaker souhaite améliorer sa précision.

2. Implémenter une technique de réduction de la variance par variables antithétiques. Évaluer le gain d'efficacité.

3. Implémenter un échantillonnage préférentiel dans lequel le joueur #16 est "survolté" et se comporte toute la semaine comme s'il avait le niveau l. (on pourra prendre $l = -\log 8$ pour l'application). Évaluer le gain d'efficacité.

4. Implémenter une technique de conditionnement où on conditionne par rapport à tous les matches dans lesquels on est sûr que #16 ne jouera pas. Pour calculer exactement la probabilité de victoire conditionnelle de #16, on utilisera la fonction `erfinv`. Évaluer le gain d'efficacité.

Indication : La fonction `erfinv` étant relativement gourmande en calcul, on s'efforcera de suivre une méthode d'implémentation qui minimise le nombre de recours à celle-ci.

5. Implémenter une technique de stratification par rapport à l'identité du plus fort joueur dans la moitié de tableau de #16, selon qu'il s'agit de #1, #2, #3, #4 ou d'un joueur plus faible. Évaluer le gain d'efficacité.

Indication : Vous pouvez choisir, soit de stratifier "à postériori" en procédant à un échantillonnage uniforme, soit d'optimiser l'échantillonnage inter-strates. Dans ce dernier cas, vous avez besoin de stratifier "à priori", càd. de savoir tirer un tableau uniformément à l'intérieur d'une strate donnée : comment feriez-vous pour cela ?

6. Implémenter une technique de réduction de la variance par variables de contrôle en utilisant pour variables de contrôle le niveau réel auquel #16 a joué lors de chacun de ses quatre matchs (ou aurait joué s'il avait été qualifié). Évaluer le gain d'efficacité.