

MÉTHODES DE MONTE-CARLO EXERCICES DU 24 MARS 2014

par Rémi Peyre

EXERCICE 1 — Mouvement brownien avec rappel

1. Écrire une fonction MATLAB d'arguments k , F , σ^2 et T qui simule sur l'intervalle de temps $[0, T]$ l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = \sigma dW_t - kF \operatorname{sgn}(X_t)|X_t|^{k-1}. \quad (1)$$

On prendra 2 048 pas de discrétisation. Tester la fonction pour $\{k = 4; F = 1; \sigma^2 = 1; T = 8\}$.

2. Interpréter physiquement l'équation (1) pour $\sigma^2 = 0$, resp. pour $F = 0$.

3. Identifier le processus (1) lorsque $k = 0$, resp. lorsque $k = 2$. Décrire le comportement du processus pour $k \rightarrow \infty$ et écrire un programme le simulant pour « $k = \infty$ ».

4. (★) Tester le programme pour $\{k = 8; F = 1; \sigma^2 = 600; T = 4\}$. Pensez-vous que la tracé proposé par MATLAB soit raisonnable ? Comment pourrait-on rendre celui-ci plus fidèle à la véritable équation ? Réfléchir à une façon d'implémenter le programme pour qu'il corrige *automatiquement* le défaut observé ici, *quelle que soit la valeur des paramètres*.

EXERCICE 2 — Mouvement brownien sur la sphère

Le but de cet exercice est de simuler une évolution aléatoire d'un point sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. J'affirme qu'une telle évolution peut être décrite par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = dW_t^{(3)} \cdot P(X_t) - X_t dt, \quad (2)$$

où W_t^3 est un mouvement brownien standard tridimensionnel et

$$P(X_t) := \begin{pmatrix} X_1^2 - 1 & X_1 X_2 & X_1 X_3 \\ X_1 X_2 & X_2^2 - 1 & X_2 X_3 \\ X_1 X_3 & X_2 X_3 & X_3^2 - 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

1. (★) En appliquant la formule d'Itô, vérifier qu'avec une condition initiale X_0 sur la sphère unité, X_t reste sur la sphère unité au cours de l'évolution.

2. Simuler le processus depuis la condition initiale $X_0 = (1, 0, 0)$ sur 4 unités de temps avec un pas de discrétisation de taille $1/512$. Regarder à quel point cette simulation reste bien sur la sphère.

3. Vérifier que par contre, si on n'avait pas tenu compte du terme « $-4X_t dX_t$ », le processus ne serait absolument pas resté sur la sphère.

EXERCICE 3 — Mouvement brownien du second ordre

On considère le système d'équations différentielles stochastiques suivant, où (X, Y) évolue dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} dX_t = Y_t dt; \\ dY_t = dW_t^{(2)}, \end{cases} \quad (4)$$

où $W_t^{(2)}$ est un mouvement brownien bidimensionnel de covariance par unité de temps C (C sera passé en paramètre des fonctions qu'on écrira), et où on part de la condition initiale $\{X_0 = \vec{0}; Y_0 = \vec{0}\}$. La question est de savoir, au bout du temps t , quelle est la distance moyenne à vol d'oiseau que le processus aura parcouru depuis son point de départ.

1. Quelle interprétation donneriez-vous au système (4) ? Quelle sera la régularité de la trajectoire de X_t ?

2. Simuler le système d'équations différentielles et tracer la trajectoire de X dans $\mathbb{R}^2$. On prendra $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Toujours pour la même valeur de C , évaluer la quantité qui nous intéresse par la méthode de Monte-Carlo.

4. Pour $C = \sigma^2 \mathbf{I}_2$, affiner l'estimation de Monte-Carlo en utilisant les variables de contrôle suivantes :

- $\int_0^T |Y_t|^2 dt$;
- $\int_0^T |Y_t| dt$.

EXERCICE 4 — Le théorème de Girsanov

Le théorème de Girsanov énonce (entre autres) la chose suivante : si $(X_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien (issu de 0) de variance par unité de temps σ^2 soumis à une dérive $b(t)$ dépendant du temps, càd. une solution de

$$dX_t = \sigma dW_t + b(t)dt, \quad (5)$$

alors la loi P_b des trajectoires de X sur $[0, T]$ est à densité par rapport à la loi P_0 des trajectoires du même mouvement brownien sans dérive, avec

$$\frac{dP_b}{dP_0}((f_t)_{0 \leq t \leq T}) = \exp\left(\sigma^{-2} \int_0^T (b(t)f'_t - \frac{1}{2}b(t)^2) dt\right). \quad (6)$$

(En général f ne sera pas dérivable, mais on pourra quand même donner un sens à (6) en interprétant « $\int_0^T b(t)f'_t dt$ » comme $\int_0^T b(t)df_t$).

1. (★) En interprétant la formule définissant X en termes de schéma d'Euler, “démontrer” le théorème de Girsanov.

2. Notons Q la loi de la trajectoire sur $[0, 1]$ d'un mouvement brownien standard avec dérive $b(t) = \mathbf{1}_{t < 1/2} \times 3 + \mathbf{1}_{t > 1/2} \times (-3)$. Exprimer la densité de Q par rapport à la loi P de la trajectoire du mouvement brownien sans dérive.

3. On note A l'événement « la trajectoire passe au-dessus de $1\frac{1}{2}$, puis redescend en dessous de 0, tout cela avant l'instant $t = 1$ ». Comment peut-on évaluer $P(A)$ à l'aide de simulations de la loi Q ? Implémenter cette technique.

4. Comparer les résultats obtenus avec ceux de la méthode de Monte-Carlo “naïve” (càd. en échantillonnant selon P).

EXERCICE 5 — Put américain

On considère dans cet exercice un actif financier dont le cours $(A_t)_{t \geq 0}$ est décrit par un mouvement brownien géométrique :

$$dA_t = \sigma A_t dW_t + \lambda dt, \quad (7)$$

avec $\sigma = 0,2$, $\lambda = 0,02$ et $A_{t=0} = 100$. (l'unité de temps est l'année et l'unité de valeur est l'euro).

Un trader a acheté un « put américain » pour l'actif A , de prix d'exercice $K = 90$ et d'échéance $T = 1$. Cela signifie que le trader a le droit (mais pas l'obligation), à un moment de son choix pendant l'intervalle $[0, 1]$ — moment qui doit évidemment être un temps d'arrêt, le trader n'étant pas devin! —, de vendre l'actif A au prix K , et ce, quel que soit son cours réel. En pratique, notre trader ne possède pas encore l'actif A au début de l'expérience : son plan est, que si le cours A_t venait à descendre suffisamment en dessous de K , il déciderait à ce moment là d'acheter un exemplaire actif pour le revendre immédiatement en exerçant son put, réalisant ainsi un bénéfice sans risque de $(K - A_t)$. La difficulté est de discerner quand est-ce que le cours de l'actif justifie d'exercer le put tout de suite, et quand est-ce qu'il est plus intéressant d'attendre en espérant que le cours descende encore plus bas.

Le trader décide de suivre la stratégie suivante, dans laquelle le paramètre P reste à fixer :

- Si, à un moment donné, le cours de l'actif descend en dessous du prix P , exercer le put à cet instant-là ;
- Si le put n'a pas encore été exercé quand arrive l'échéance, l'exercer à ce moment-là si et seulement si $A_T < K$.

Le but de la manœuvre, pour le trader, est d'optimiser l'espérance du gain (éventuellement nul) qu'il réalisera grâce à son put. Notant $\beta(P)$ le bénéfice moyen pour la valeur P du paramètre, il s'agit donc de trouver $P^* := \arg \max_P \beta(P)$.

1. Écrire une fonction qui, étant donné P , évalue $\beta(P)$ par la méthode de Monte-Carlo. En déduire dans quelle plage de valeurs devrait se trouver P^* .

2. Quelle technique de réduction de variance pourrait-on utiliser pour cerner plus finement P^* ? Implémenter cette technique et donner les résultats obtenus.