MÉTHODES DE MONTE-CARLO

EXERCICES DU 10 MARS 2014

par Rémi Peyre

EXERCICE 1 — Intermittences

Une usine produit des boulons tout au cours de la journée, de 8 h à 18 h. En fonctionnement normal, elle produit 100 000 boulons par heure. Toutefois, il faut exactement 1 heure de préchauffage du système avant que la production puisse démarrer (y compris le matin à 8 h). En outre, l’approvisionnement électrique de l’usine est vétuste : l’électricité tombe en panne (en moyenne) une fois toutes les 3 heures, avec des pannes qui durent de l’ordre d’1 heure. Plus précisément, on modélise les pannes électriques ainsi :

- À un instant donné (donc en particulier le matin à 8 h), l’électricité a $1/4$ risque d’être en panne.
- Quand l’électricité est en panne, il faut attendre une loi exponentielle de moyenne 1 h avant qu’elle soit réparée.
- Quand l’électricité fonctionne, elle tombe en panne au bout d’une loi exponentielle de moyenne 3 h.

1. Expliquer pourquoi le processus « état du système électrique » (qui oscille entre les valeurs « en panne » et « en service ») est markovien. Expliquer pourquoi, à l’inverse, le processus « état de l’usine » (qui oscille entre les valeurs « préchauffage », « fonctionnement » et « panne »), n’est pas markovien. Observer que toutefois, en ajoutant une information supplémentaire (laquelle ?) à l’état de l’usine, on obtient alors un processus markovien.

2. Simuler le fonctionnement de l’usine sur une journée, et faire retourner au programme le nombre de boulons produits dans la journée [*].

3. Évaluer par la méthode de Monte-Carlo la production journalière moyenne de l’usine.

4. Montrer qu’on peut aussi réaliser la simulation de l’état de l’électricité de la façon suivante : de façon poissonnienne, il se produit une panne toutes les 3 heures en moyenne, et une réparation toutes les 1 heure en moyenne, sachant que quand une “panne” se produit sur un système déjà hors-service, cela n’a en fait aucun effet, et de même lorsqu’un système fonctionnel se “répare”.

5. À l’aide de la méthode de simulation suggérée à la question précédente, utiliser la variable de contrôle « nombre de pannes (et de “sur-pannes”) dans la journée » (incluant l’éventuel état de panne initial) pour améliorer l’efficacité de la méthode de Monte-Carlo.

Exaspérée par les pannes à répétition de l’électricité, sur lesquelles elle n’a pas de pouvoir, la directrice de l’usine envisage de changer la chaîne de production : le rendement en fonctionnement serait le même, mais le préchauffage du système ne durerait plus qu’une demi-heure. Comme cette nouvelle chaîne serait onéreuse à mettre en place, la directrice cherche à savoir quelle amélioration en résulterait sur la production journalière moyenne.

6. Estimer l’amélioration apportée, en utilisant une méthode de couplage.

7. Améliorer encore la précision en appliquant la méthode de la variable de contrôle *en plus* du couplage.

[*]. On ne se préoccupera pas ici du fait que les formules donnent des nombres de boulons non entiers.

EXERCICE 2 — File d'attente

Le but de cet exercice est de simuler un phénomène de file d'attente, par exemple à un péage sur l'autoroute, sous une hypothèse d'arrivée poissonnienne des voitures et de traitement poissonnien de leurs requêtes^[†].

Ce qu'on va simuler est l'évolution au cours du temps (noté t , compté en minutes) du nombre V_t de voitures attendant au péage. Ce nombre de voitures évolue markoviennement, avec les règles suivantes. Au cours d'un intervalle de temps dt :

- S'il y a au moins une voiture qui attend, la probabilité qu'une voiture passe (et donc que V_t diminue d'une unité) est αdt , avec $\alpha = 4 \text{ min}^{-1}$;
- La probabilité qu'une nouvelle voiture arrive (et donc que V_t augmente d'une unité) est βdt , où β est la densité du trafic.

En d'autres termes,

$$dV_t = -\mathbf{1}_{V_t > 0} \mathbf{1}_{t \in \mathcal{P}_\alpha} + \mathbf{1}_{t \in \mathcal{P}_\beta}, \quad (1)$$

où $\mathcal{P}_\alpha$ et $\mathcal{P}_\beta$ sont deux processus de Poisson sur $\mathbb{R}_+$ indépendants d'intensités respectives α et β .

1. Sachant la valeur de V_t à un instant donné, quelle est la loi du temps d'attente avant que V_t évolue, et la loi du saut que V_t fera à cet instant ?

2. Écrire un programme simulant $(V_t)_{0 \leq t \leq T}$ (en partant de $V_0 = 0$), les paramètres du programme étant T et β . Lancer les simulations pour $T = 720$ et respectivement $\beta = 0,5\alpha$, $\beta = 0,95\alpha$ et $\beta = 1,05\alpha$. Commenter.

Indication : La fonction `stairs` de MATLAB permet de plotter facilement des fonctions en escalier.

3. Pour une simulation donnée, exprimer le temps d'attente moyen τ des automobilistes en fonction de $(V_t)_t$. (Si $V_T > 0$, on prolongera la simulation jusqu'à ne plus avoir de voitures, en interdisant aux voitures de continuer d'arriver au-delà de T). Modifier le programme pour qu'il retourne également cette valeur.

4. Expliquer pourquoi est-ce que, lorsqu'on réalise plusieurs simulations, le temps moyen d'attente des automobilistes sur l'ensemble des simulations n'est *pas* la moyenne des temps d'attente moyens sur chaque simulation.

5. (★) Comment feriez-vous pour utiliser malgré tout la méthode de Monte-Carlo afin d'estimer le temps moyen d'attente des automobilistes sur l'ensemble d'un grand nombre de simulations ? Implémenter vos idées.

Indication : Pour trouver le temps d'attente moyen global, il faut évaluer deux quantités différentes par la méthode de Monte-Carlo. Dans un premier temps, on peut simplement combiner les intervalles de confiance sur ces deux quantités pour en déduire un intervalle de confiance sur le temps moyen global qui en résulte. Mais il y a moyen d'être plus malin que ça et d'utiliser la *loi jointe* de l'incertitude sur les deux quantités pour en déduire un résultat nettement plus précis.

Indication : On peut en outre remarquer qu'un des deux espérances dont on a besoin peut en fait être calculée exactement : il n'y a alors plus qu'une seule méthode de Monte-Carlo à appliquer... À noter que dans ce cas, l'idée suggérée dans l'indication précédente d'utiliser la loi jointe de l'incertitude se transpose en une technique de réduction de la variance bien connue : laquelle ?

6. (✿) Simuler à plusieurs reprises τ avec les jeux de paramètres suivants : $(\beta = 0,5\alpha, T = 720)$, $(\beta = 0,5\alpha, T = 5\,040)$, $(\beta = 0,95\alpha, T = 720)$, $(\beta = 0,95\alpha, T = 5\,040)$. Que constate-t-on ?

[†]. Cette seconde hypothèse est évidemment peu réaliste concernant le cas d'un péage, mais ce n'est qu'un exercice...

7. (★) Expliquer en quoi *chaque* simulation du processus s'apparente en fait à une méthode de Monte-Carlo.
8. (★) Trouver une façon d'évaluer l'intervalle de confiance pour la méthode de Monte-Carlo "à simulation unique".

EXERCICE 3 — Ruine de l'assureur

On considère une compagnie d'assurances dont le fonctionnement peut être résumé de la façon suivante :

- Au début de l'année, la compagnie a une réserve d'argent R_0 dans sa caisse.
- Au cours de l'année, de façon régulière, la compagnie collecte les primes de ses assurés. Cela assure à la compagnie un revenu constant de valeur par unité de temps a .
- De façon aléatoire (poissonnienne), il peut survenir un sinistre qui oblige la compagnie à verser un remboursement Z à l'un de ses assurés. On suppose que Z suit alors la loi de Pareto suivante :

$$\mathbb{P}(Z \geq z) = (z/z_0)^{-\kappa} \wedge 1, \quad (2)$$

où κ et z_0 sont des paramètres du modèle.

Le but pour l'assureur est évidemment d'éviter la situation de ruine, où il se retrouverait obligé verser un argent qu'il ne possède pas.

1. Simuler sur une année l'évolution de la réserve R_t dont l'assureur dispose dans sa caisse. On prendra comme unité de temps la semaine (1 an = 52 sem), avec les paramètres suivants :

- $\kappa = 1,2$;
- $z_0 = 10\,000$;
- Taux de sinistres moyens $\tau = 1 \text{ sem}^{-1}$;
- Taux de versements $a = 70\,000 \text{ €} \cdot \text{sem}^{-1}$;
- Réserve initiale $R_0 = 1\,000\,000 \text{ €}$.

2. Évaluer par la méthode de Monte-Carlo le risque de ruine de la compagnie dans l'année.

3. Améliorer la méthode de Monte-Carlo en lui appliquant une technique de stratification. On distinguera trois strates, en fonction du montant du plus gros sinistre :

1. Pas de gros sinistre (que des sinistres de montants $< 400\,000 \text{ €}$);
2. Un ou plusieurs gros sinistres, mais pas de catastrophe (plus gros sinistre entre $400\,000$ et $800\,000 \text{ €}$);
3. Existence d'au moins un sinistre catastrophique, de montant $> 800\,000 \text{ €}$.

4. (★) Montrer qu'on peut simuler (presque) directement la loi conditionnée à une strate particulière. En déduire une façon d'améliorer la stratification en choisissant judicieusement l'échantillonnage interstrates.

5. Appliquer une méthode d'échantillonnage préférentiel avec une loi d'échantillonnage pour laquelle la loi des sinistres est changée avec $\kappa = 1,15$ (les autres paramètres restant inchangés).

6. (★) Réaliser maintenant un échantillonnage préférentiel où c'est plutôt la fréquence des sinistres qui change ($\tau = 1,15 \text{ sem}^{-1}$).