MÉTHODES DE MONTE-CARLO EXERCICES DU 17 FÉVRIER 2014

par Rémi Peyre

EXERCICE 1 — Grandes déviations d'un tirage à pile ou face

Soit $\mathbb{P}$ la loi de probabilité correspondant à 100 lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée, et soit X la variable aléatoire comptant le nombre de "pile" à l'issue de ces lancers. On cherche ici à calculer avec précision la valeur de $\mathbb{E}((X - 60)_+) =: R$, où $a_+ := \max(x, 0)$ désigne la partie positive d'un nombre $a \in \mathbb{R}$.

1. Commencer par écrire un algorithme « naïf » calculant un intervalle de confiance à 2 sigmas (soit 95,4 % de confiance) pour R , qui prendra en paramètre le nombre N de simulations à effectuer.

2. Modifier cet algorithme pour qu'il choisisse automatiquement N de façon à ce que l'intervalle de confiance corresponde à une erreur relative inférieure à 4 %.

Indication : Le programme devra essayer de déterminer N a priori plutôt que de vérifier après chaque étape si la précision requise est atteinte.

On note maintenant $\mathbb{P}'$ la loi de probabilité correspondant à 100 lancers successifs d'une pièce pipée qui a une probabilité 0,6 de tomber sur "pile" à chaque lancer.

3. Quelle est la densité de $\mathbb{P}$ par rapport à $\mathbb{P}'$?

4. En déduire un algorithme d'échantillonnage préférentiel pour le calcul de R .

5. Comparer les temps de calculs nécessaires pour calculer R avec la précision requise.

EXERCICE 2 — La centrale nucléaire, bis

Question. Reprendre le problème de la centrale nucléaire présenté dans le polycopié ; et lui appliquer une méthode d'échantillonnage préférentiel différente de celle proposée dans le cours, dans laquelle on prendra comme loi d'échantillonnage une produit de lois exponentielles de paramètres judicieusement choisis.

EXERCICE 3 — Entraînement au conditionnement

Un industriel modélise le rendement de sa production en fonction de trois paramètres réels x , y et z :^[*] la quantité qu'il produit par heure dépend de ces trois paramètres selon

$$\frac{e^{y+z}}{1 + |x|^{0,4}}. \quad (1)$$

Sachant que le triplet (x, y, z) suit une loi normale centrée de matrice de covariance est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 1 & 0,5 \\ 0,1 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

notre industriel se demande quel est son rendement moyen, noté ρ .

1. Commencer par évaluer ρ par une méthode de Monte-Carlo « naïve ».

[*]. Disons par exemple que notre industriel est un métallurgiste, et que x représente la qualité de l'équilibre entre les différents ingrédients du mélange, y la température dans le fourneau et z la pression.

Indication : On simulera (x, y, z) par la méthode de Cholesky, expliquée oralement en TP.

2. Conditionnellement à x , quelle est la loi de (y, z) ?
3. Calculer explicitement ^[†]

$$\mathbb{E} \left(\frac{e^{Y+Z}}{1 + |X|^{0,4}} \mid X = x \right), \quad (3)$$

où il est sous-entendu que la loi de (X, Y, Z) sous $\mathbb{P}$ est celle de notre triplet de paramètres.

4. En déduire une technique de conditionnement pour évaluer ρ plus efficacement.
5. Implémenter cette technique de conditionnement.

[†]. Quand je dis « explicitement », cela autorise quand même que certains paramètres n'aient pas d'expression analytique simple, du moment que MATLAB sache les calculer exactement (aux erreurs d'arrondi près s'entend).