

# MÉTHODES DE MONTE-CARLO

## EXERCICES DU 10 FÉVRIER 2014

par Rémi Peyre

### EXERCICE 1 — Mathématiques expérimentales

1. Soit  $\cdot$  suivant une loi normale de moyenne 3 et d'écart-type 2; écrire un programme évaluant  $\mathbb{E}(\cdot^4)$  par la méthode de Monte-Carlo.

*Indication :* Les lois normales peuvent être simulées à l'aide de la fonction `randn` de MATLAB. Consulter « doc `randn` » pour plus de détails.

2. Modifier le programme pour que celui-ci retourne aussi un intervalle de confiance à 90 %. En poussant le nombre de simulations, émettre une conjecture sur la valeur exacte du résultat.

3. Proposer une méthode pour mettre en commun les calculs de toute la classe afin d'obtenir un résultat plus précis et de pouvoir tester la conjecture.

4. Éteindre et relancer MATLAB, exécuter à nouveau votre programme, noter le résultat; relancer à nouveau MATLAB et voir ce que donne une nouvelle exécution. Que remarquez-vous? Quel souci cela pose-t-il? Pourquoi le phénomène observé peut-il malgré tout être intéressant? Comment remédier au souci posé?

*Indication :* Regardez « doc `rng` » pour en savoir plus sur le fonctionnement interne de MATLAB...

5. Ayant réglé le problème soulevé par la question précédente, mettez en commun les résultats de toute la classe. Votre conjecture s'en trouve-t-elle renforcée? Proposer une méthode pour la démontrer théoriquement.

### EXERCICE 2 — Probabilité d'un brelan

Au poker (variante dite « fermée »), le joueur reçoit 5 cartes au sein d'un sabot contenant 4 cartes de chacun des 13 « hauteurs » possibles. Puis il décide d'échanger entre 0 et 3 cartes en vue d'améliorer sa main. Une combinaison intéressante est d'obtenir un brelan, c'est-à-dire (au moins) trois cartes de même hauteur.

**Question.** Évaluer la probabilité qu'un joueur dont le seul but est d'obtenir un brelan atteigne son objectif. On exprimera le résultat sous la forme d'un intervalle de confiance à 2 sigmas.

### EXERCICE 3 — Volume d'une boule

Soit  $\mathbb{P}$  la loi sur  $\mathbb{R}^6$  caractérisée par la densité

$$\frac{d\mathbb{P}}{dx}(x) = Z^{-1}e^{-4\|x\|_{\ell^1}}, \quad (1)$$

où  $\|x\|_{\ell^1} := |x_1| + |x_2| + \dots + |x_6|$ , et où  $Z$  est la constante qui fait de (1) une densité de probabilité.

1. Écrire un programme simulant  $\mathbb{P}$ .

2. Calculer la valeur de  $Z$ .

3. Évaluer le volume de la boule unité de dimension 6<sup>[\*]</sup> par la méthode de Monte-Carlo avec la loi d'échantillonnage  $\mathbb{P}$ , en précisant un intervalle de confiance. Comparer avec la valeur théorique de  $\pi^3/6$ .

---

[\*]. Càd. l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^6$  dont la distance euclidienne à l'origine est inférieure ou égale à 1.

**EXERCICE 4 — Manque d'intégrabilité  $L^2$** 

On considère une loi  $\mathbb{P}$  sous laquelle la variable  $X$  suit une loi  $\text{Pareto}(1,5)$ , c'est-à-dire que  $X$  est une variable aléatoire sur  $[1, \infty)$  telle que pour tout  $x \geq 1$ ,  $\mathbb{P}(X \geq x) = x^{-1,5}$ .

1. Caculer la densité de la loi  $\text{Pareto}(1,5)$  par rapport à la mesure de Lebesgue. En déduire que  $X$  est  $L^1$  mais pas  $L^2$ , et calculer (théoriquement)  $\mathbb{E}(X)$ .

2. Écrire un programme MATLAB qui tente d'évaluer un intervalle de confiance à 80 % de  $X$  en faisant comme si celle-ci était de classe  $L^2$ . Connaissant la vraie valeur de  $\mathbb{E}(X)$ , cet intervalle de confiance est-il fiable ? Faire afficher au programme sa soi-disant « efficacité par simulation » ; regarder comment celle-ci varie d'une simulation à l'autre, ainsi que quand le nombre de simulations augmente. Commenter.