Méthode de Monte-Carlo & Application aux Processus Aléatoires
DEVOIR À LA MAISON POUR LA SECONDE SESSION D'EXAMEN
6 juin 2014

Les aiguilles de Buffon

PARTIE I : La formule de Buffon

L'expérience des aiguilles de Buffon est une méthode empirique de calcul de π. Dans cette expérience, on se situe dans une pièce dont le sol est revêtu d'un parquet avec des lattes de largeur l, et on dispose d'un grand nombre Z d'aiguilles identiques de longueur a. On lance les aiguilles depuis une hauteur beaucoup plus grande que l (en pratique, il suffit des les lâcher de la hauteur de son corps). Une fois que les aiguilles sont au sol, on compte le nombre de points où une aiguille croise une séparation entre deux lattes de rangées différentes (voir la figure 1), nombre qu'on appelle N. La formule de Buffon est alors une certain estimateur de π en fonction de Z, N, a et l.

Pour une aiguille i, on note $y_i \in \mathbb{R}$ la coordonnée 'y' du milieu de l'aiguille ('y' étant l'axe perpendiculaire aux lattes), et note $\tilde{y}_i$ la distance de ce point à la latte située immédiatement en dessous, de sorte que (nous prendrons ici $y = 0$ à une frontière entre deux lattes) $\tilde{y}_i$ est l'unique $h \in [0, l)$ tel que $y_i = kh + \tilde{y}_i$ avec $k \in \mathbb{N}$. D'autre part, on note $\theta_i \in [0, \pi)$ l'angle formé par l'aiguille avec l'horizontale. (voir la figure 1).

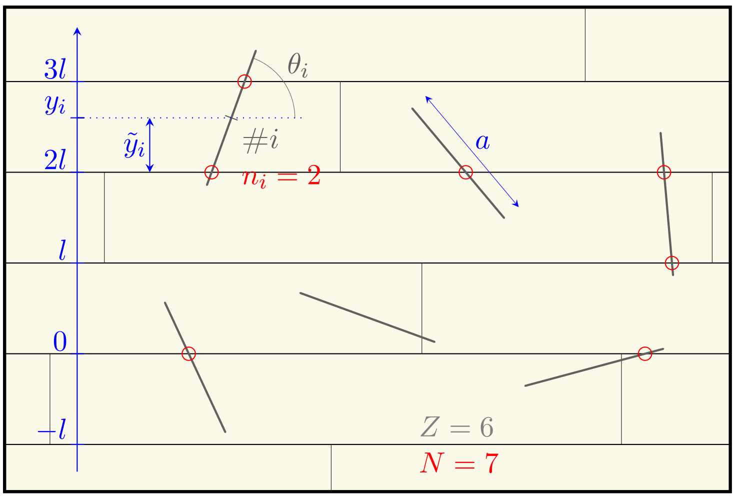

FIGURE 1 – Illustration de l'expérience de Buffon

1. À votre avis, à quoi devrait ressembler la loi de y_i ? Et celle de $\tilde{y}_i$? Quelle sera selon vous la loi de θ_i ? Et celle du couple $(\tilde{y}_i, \theta_i)$?

2. Appelons n_i le nombre d'intersections de l'aiguille i avec les frontières entre lattes. Exprimer n_i en fonction de $(\tilde{y}_i, \theta_i)$.

3. Calculer théoriquement $\mathbb{E}(n)$ (j'entends par là la valeur commune de $\mathbb{E}(n_i)$).

4. Expliquer en quoi on peut voir une méthode de Monte-Carlo dans la méthode des aiguilles de Buffon : quel est la quantité ν qu'on estime, et quel est son estimateur ? Déduire de l'estimateur de ν une formule pour estimer π.

5. Calculer un intervalle de confiance (dont je vous laisse choisir le niveau) pour l'estimateur de ν de la question précédente. En déduire un intervalle de confiance pour π.
Indication : On pourra considérer que la largeur de l'intervalle de confiance pour ν est suffisamment petite pour qu'on puisse linéariser les changements de variables.

6. Faire l'expérience en vrai (prendre une photo). Commenter le résultat et sa précision.
Indication : On pourra utiliser des allumettes à la place des aiguilles.

On s'intéresse maintenant à la question de simuler *l'expérience de Buffon pour en obtenir une meilleure précision. Un des problèmes qui se pose est de simuler θ, ou plus exactement le couple* $(\cos\theta, \sin\theta)$ *: en effet, on ne peut pas légitimement utiliser la connaissance de la valeur de π dans cette simulation, étant donné que notre but est précisément de calculer cette valeur ; et on ne peut pas non plus utiliser les fonctions trigonométriques, pour la même raison...*

Nota : *En fait, on ne connaitra jamais θ lui-même, mais seul le couple* $(\cos\theta, \sin\theta)$ *nous importe !*

7. Proposer une méthode de simulation de $(\cos\theta, \sin\theta)$ satisfaisant les contraintes ci-dessus.
Indication : Si on sait simuler des variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$, [*] on peut en déduire une méthode de simulation de la loi uniforme sur le disque unité par rejet sur le carré $[-1, 1] \times [-1, 1]$, puis en tirer une simulation de $(\cos\theta, \sin\theta)$.

8. Implémenter une simulation de la méthode des aiguilles de Buffon avec un million d'aiguilles. (On prendra des paramètres a et l à peu près égaux à ceux de l'expérience physique). Commenter le résultat obtenu ainsi que sa précision.

PARTIE II : Réduction de la variance

9. On considère la loi du couple $(\tilde{y}, \theta)$ pour chaque aiguille. Conditionnellement à θ, quelle est la loi de $\tilde{y}$? En déduire l'espérance conditionnelle de n sachant θ, qu'on notera $\bar{n}(\theta)$.

10. Grâce à la question précédente, utiliser une technique de conditionnement pour obtenir une nouvelle estimation de ν (et donc de π) par la méthode de Monte-Carlo. Implémenter cette technique (avec les mêmes paramètres qu'à l'implémentation de la question 8). Commenter la précision du résultat et la vitesse du calcul par rapport à la simulation de la question 8.

☛ *Dans la suite du problème, on s'intéresse à des techniques de réduction de variance pour le problème d'évaluation de ν* tel que posé lors de la question précédente, *c'est-à-dire, on part de la méthode dans laquelle le conditionnement est* déjà *utilisé. Il s'agit donc d'évaluer ν à partir de simulations de* $(\sin\theta, \cos\theta)$.

11. Que valent $\mathbb{E}(\sin^2\theta)$, resp. $\mathbb{E}(\sin^4\theta)$?

[*]. Les variables pseudo-aléatoires que fournissent les logiciels de calcul numérique, dans la quasi-totalité des cas, sont produites par la méthode du générateur congruentiel linéaire, méthode qui n'a absolument pas besoin de connaitre la valeur de π pour simuler une loi uniforme sur $[0, 1]$: il n'y a donc pas d'escroquerie méthodologique à ce niveau.

12. Utiliser les réponses à la question précédente pour réduire la variance dans l'évaluation de ν (donc de π) à l'aide de l'utilisation des variables de contrôle $\sin^2\theta$ et $\sin^4\theta$.

13. Soit θ' la valeur qui se déduit de θ par un quart de tour, càd. $\theta' = \theta \pm \pi/2$ où le signe est choisi de sorte que $\theta' \in [0, \pi)$. Montrer que θ' a la même loi que θ.

14. Expliquer grossièrement pourquoi on peut s'attendre à ce que $\bar{n}(\theta)$ et $\bar{n}(\theta')$ soient négativement corrélées. En déduire une technique de réduction de variance pour l'évaluation de ν à l'aide de l'utilisation de variables antithétiques. Implémenter cette méthode et commenter.

15. Proposer une interprétation “physique” à la méthode de variables antithétiques des questions précédentes.

PARTIE III : Le double effet *Kiss Cool*

16. Lorsque nous utilisons la méthode de rejet pour simuler θ, quelle est la loi du nombre d'essais nécessaires avant de tomber dans le disque unité ?

17. En déduire une autre méthode de Monte-Carlo pour évaluer π à partir des mêmes simulations. (On ne demande pas forcément d'implémenter la méthode dès cette question).

18. Expliquer pourquoi l'évaluation de π qu'on fait à la question 17 et celle qu'on faisait à la question 10, bien que provenant des mêmes simulations, sont indépendantes.

19. Soient deux variables aléatoires indépendantes $X_1 \sim m + \mathcal{N}(\sigma_1^2)$ et $X_2 \sim m + \mathcal{N}(\sigma_2^2)$. Pour $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, quelle est la variance de $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$? En déduire pour quel choix de (α_1, α_2) la variance de $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$ est minimale sous la contrainte « $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ».

20. En déduire, lorsque $\hat{m}_1$ et $\hat{m}_2$ sont deux estimateurs non biaisés gaussiens indépendants d'une même quantité m, quelle est la meilleure façon de combiner des deux estimateurs pour évaluer plus finement m, et préciser que la variance du nouvel estimateur obtenu.

21. Implémenter la méthode de la question précédente pour combiner les deux estimations de π obtenues aux questions 10 et 17 ; commenter.