Corrigé de l'exercice 2 du 24 mars

Question 1

Pour répondre à cette question, il sera plus commode de procéder d'abord à quelques manipulations préliminaires. Tout d'abord, étant donné que $-dW_t^{(3)}$ a la même loi que $dW_t^{(3)}$, on peut changer le signe de la matrice $P(X_t)$ sans changer le sens de l'équation (2). [*] En outre, puisque ce qui nous intéresse est de savoir ce qui se passe lorsque la norme euclidienne de X, notée $|X|$, est égale à 1, on pourra traiter la question en remplaçant P par une matrice qui lui est identique lorsque $|X|$ vaut 1. En l'occurrence, je propose d'utiliser la matrice :

$$\tilde{P}(X) := -|X|^{-2} \begin{pmatrix} X_x^2 - |X|^2 & X_x X_y & X_x X_z \\ X_x X_y & X_y^2 - |X|^2 & X_y X_z \\ X_x X_z & X_y X_z & X_z^2 - |X|^2 \end{pmatrix}. \text{[‡]}$$

(Cette matrice n'est pas bien définie pour $X = \vec{0}$, mais nous n'aurons pas à prendre ce cas en considération ici).

Qu'est-ce que la matrice $\tilde{P}$? Il s'agit en fait du *projecteur orthogonal sur le plan tangent à la sphère (centrée sur l'origine, de rayon $|X|$) au point X* ! L'idée est qu'en multipliant le bruit gaussien $dW^{(3)}$ par $\tilde{P}$ (ou par P), on va *obliger le bruit à n'agir que dans les directions tangentes à la sphère.* Cette remarque permet, d'une part de comprendre comment j'ai sorti la formule (3) de mon chapeau, et d'autre part de voir que $\tilde{P}$, en tant que projecteur orthogonal, vérifiera les identités algébriques « $\tilde{P}^2 = \tilde{P}$ » et « $\tilde{P}^\top = \tilde{P}$ », identités dont nous nous servirons dans la suite des calculs.

De même, pour des raisons qui apparaitront plus loin, nous remplacerons dans cette question le terme « $-X_t\,dt$ » par « $-|X_t|^{-2} X_t\,dt$ » : à nouveau cela ne change rien lorsque $|X_t|$ vaut 1.

Ces manipulations préliminaires étant posées, venons-en au cœur de la question. Il s'agit de vérifier que, si X est à un moment donné sur la sphère unité, il y reste dans la suite. Que signifie « être sur la sphère unité » ? C'est tout simplement vérifier l'égalité « $f(X) = 1$ », où $f(X) = XX^\top$ est la fonction "carré de la distance à l'origine"[§]. Posant $Y := f(X)$, il s'agit donc de savoir quelle est l'équation différentielle stochastique régissant l'évolution de Y. C'est précisément à ce genre de changement de transformations que sert la formule d'Itô...

Que nous dit donc la formule d'Itô ? D'abord, qu'on peut remplacer f par son développement limité à l'ordre 2. Rien de plus facile ici puisque f est déjà un

[*]. Plus généralement, quand on a un terme de bruit blanc gaussien en « $dW^{(k)} \cdot M$ » dans une équation différentielle stochastique (où M est une matrice $k \times d$), ce qui compte dans la description de ce bruit est simplement sa covariance par unité de temps, à savoir la matrice $M^\top M$ (de dimensions $d \times d$). [†] En l'occurrence, changer le signe de P ne change effectivement pas $P^\top P$, donc le sens de l'équation reste bien le même.

[†]. La logique voudrait d'ailleurs qu'on décrive l'équation en donnant directement $M^\top M$ plutôt que M, mais il semblerait malheureusement qu'il n'existe pas de convention convenable pour ce faire...

[‡]. J'ai finalement opté pour noter le vecteur X comme « (X_x, X_y, X_z) » plutôt que « (X_1, X_2, X_3) », car cela me semble en fait plus clair ainsi.

[§]. On aurait aussi pu prendre la fonction "distance à l'origine", mais celle-ci n'est pas aussi régulière que f, de sorte que cela aurait conduit à des calculs plus lourds.

polynôme quadratique : il n'y a donc rien à faire ;-) On écrit donc :

$$\begin{aligned}dY &= f(X+dX) - f(X) = (X+dX)(X+dX)^\mathsf{T} - XX^\mathsf{T}\\ &= XdX^\mathsf{T} + dXX^\mathsf{T} + dXdX^\mathsf{T} + o(|dX|^2) = 2XdX^\mathsf{T} + dXdX^\mathsf{T} + o(|dX|^2).\text{[¶]}\end{aligned} \tag{1}$$

Dans la formule (1), le terme d'ordre 1 en dX se calcule tout simplement comme valant $(2X\tilde{P}\,dW - 2\,dt)$. [||] [**]

Reste à traiter le terme d'ordre 2 en dX. Que nous dit la formule d'Itô à ce sujet ? Elle nous dit qu'il faut *aller jusqu'à l'ordre* 1 *en* dt*, sachant que les termes de* dW *doivent être traités comme des* $O(dt^{1/2})$. Par conséquent, quand nous observons le terme $dXdX^\mathsf{T}$, les termes en $O(dWdt)$ et en $O(dt^2)$ qui apparaissent peuvent être négligés, et il ne nous reste plus que le terme :

$$dW\tilde{P}(dW\tilde{P})^\mathsf{T} = dW\tilde{P}dW^\mathsf{T}.$$

Ce terme est formellement un terme en $O(dt)$. C'est là qu'intervient la dernière règle de la formule d'Itô : elle nous dit que *les termes d'ordre* 1 *en* dt *doivent être remplacés par leurs espérances*. Que vaut donc $\mathbb{E}(dW\tilde{P}dW^\mathsf{T})$? On commence par développer l'expression matricielle :

$$dW\tilde{P}dW^\mathsf{T} = \sum_{i,j} \tilde{P}_{ij} dW_i dW_j\,;$$

d'où

$$\mathbb{E}(dW\tilde{P}dW^\mathsf{T}) = \sum_{i,j} \tilde{P}_{ij}\,\mathbb{E}(dW_i dW_j).$$

Et maintenant, que vaut $\mathbb{E}(dW_i dW_j)$? Eh bien, c'est tout simplement la case d'indice ij de la matrice de covariance de $dW^{(3)}$, laquelle matrice est $\mathbf{I}_3 dt$ par définition

[¶]. Il s'agit ici d'un développement limité tout ce qu'il y a de plus "normal", à ceci près qu'on vous a appris jusqu'ici essentiellement des développements limités selon des quantités *scalaires*, alors qu'ici la quantité dX est *vectorielle*, d'où une certaine complexité supplémentaire. La notation des développements limités selon des quantités vectorielles peut poser quelques difficultés. On peut utiliser une notation sommatoire, avec une formule comme

$$f(X+dX) = X + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i} dX_i + \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dX_i dX_j + o(|dx|^2)\,;$$

toutefois ce formalisme est assez lourd. Une alternative est la *convention d'Einstein*, qui consiste en quelque sorte à "omettre" les symboles de sommation (en notant les composantes concernées tantôt en indice et tantôt en exposant afin de déterminer quelles sont les sommations à effectuer). La convention d'Einstein est en fait elle-même une façon originale d'écrire le formalisme de l'*algèbre tensorielle* (ou *multlinéaire*), qui est la seule à même de traiter ce genre de développemements limités de façon puissante et efficace, mais que vous ne connaissez pas ou très peu. Dans le cas d'un développement limité d'ordre 1 ou 2, il existe enfin une quatrième voie consistant à employer un formalisme matriciel pour condenser les formules sommatoires : c'est précisément ce que j'ai fait ici.

[||]. Je laisse dorénavant tomber les indices et exposants lorsque ceux-ci sont évidents...

[**]. Le fait d'avoir rajouté un facteur « $|X|^{-2}$ » devant le terme de dérive de l'équation (2) s'explique à présent : il simplifie l'expression du terme en dt que nous venons de calculer.

du mouvement brownien standard 3-dimensionnel.[††] Ainsi,

$$\mathbb{E}(dW\tilde{P}dW^{\mathsf{T}}) = \sum_i \tilde{P}_{ii}dt = \operatorname{tr}\tilde{P}dt = 2dt.$$

Quand on combine tout cela, on obtient finalement :

$$dY_t = 2X_t\tilde{P}(X_t)\,dW_t^{(3)} - 2\,dt + 2\,dt.$$

Rappelant que $\tilde{P}(X)$ est le projecteur orthogonal sur le plan tangent à la sphère en X, puisque ce plan tangent est orthogonal au vecteur X, on a « $2X\tilde{P}(X) = 0$ » : il n'y a donc aucun terme de bruit dans l'équation différentielle stochastique régissant Y ! (Ce qui ne doit pas nous surprendre, dans la mesure où l'idée de projeter le bruit gaussien dans la direction des surfaces de niveau de f était précisément censée avoir cet effet). On remarque aussi que les termes en dt se simplifient, ce qui explique à postériori le fait d'avoir ajouté un terme de "dérive" dans l'équation (2) : nous avions besoin de ce terme pour annuler le terme en dt qui ressort de la prise en compte de l'ordre 2 en dX dans la formule d'Itô...

Bref ; au final on a $dY_t = 0$, autrement dit Y reste constant : nous avons donc bien démontré que pour l'équation différentielle stochastique (2), si le mobile est initialement sur la sphère unité, il y reste par la suite.

Question 2

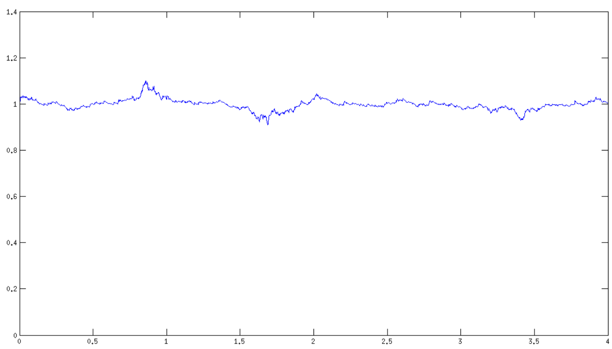
Cette question est une simple implémentation de la méthode dEuler stochastique. Voici mon code :

```
function MBsphere
% La fonction 'MBsphere' simule le mouvement brownien sur la sphère (ou sa
% variante quand on omet le terme de dérive pour compenser l'effet du terme
% d'Itô). Elle trace l'évolution de la distance à l'origine en fonction du
% temps.

% 'T' est la durée de simulation.
T = 4;

% 'dt' est le pas de discrétisation, et 'N' le nombre de pas à effectuer.
dt = 1/512;
N = ceil(T/dt);

% On alloue la mémoire pour les valeurs successives du vecteur X.
les_Xt = zeros(3,N+1);
% On initialise le vecteur-colonne 'X' représentant X pour t=0, et on
% enregistre la valeur correspondante dans les_Xt.
X = [1;0;0];
les_Xt (:,1) = X;
```

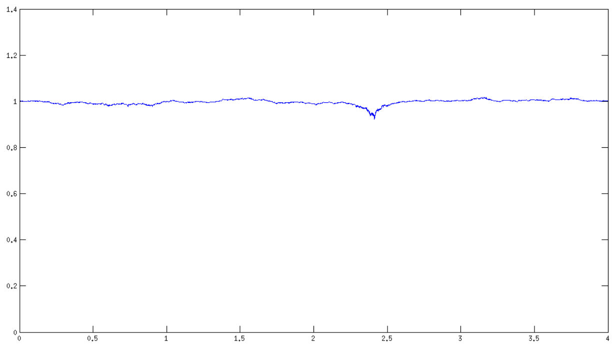
[††]. On peut présenter les choses autrement en disant que les composantes d'un mouvement brownien standard k-dimensionnel sont k mouvements browniens standards 1-dimensionnels *indépendants* : en effet, le fait que $dW^{(k)}$ soit un vecteur gaussien centré de matrice de covariance $\mathbf{I}_k dt$ signifie, d'après les propriétés des vecteurs gaussiens, que les $dW_i^{(k)}$ sont indépedants et de même loi $\mathcal{N}(dt)$. Du coup, puisque pour $i \neq j$ les v.a. dW_i et dW_j sont indépendantes, on a alors $\mathbb{E}(dW_i dW_j) = \mathbb{E}(dW_i)\,\mathbb{E}(dW_j) = 0 \times 0 = 0$; et d'autre part $\mathbb{E}(dW_i^2) = \mathbb{E}(dW_i)^2 + \operatorname{Var}(dW_i) = 0^2 + dt = dt$.

```
% Méthode d'Euler stochastique. Le calcul de la matrice P(X_t) est effectué
% grâce à la sous-routine 'P' codée ci-dessous. Attention au fait qu'ici X
% suit une formalisme de vecteur-colonne, et qu'il faut donc transposer par
% rapport aux formules de l'énoncé !
for i = 1:N
    X = X + sqrt(dt) * P(X')' * randn(3,1) - X * dt;
    % Remplacer la ligne précédente par la suivante pour traiter la
    % question 3.
    %X = X + sqrt(dt) * P(X')' * randn(3,1);
    les_Xt (:,i+1) = X;
end

% 'les_Rt' est l'évolution de la distance de X_t à l'origine.
les_Rt = sqrt (sum (les_Xt.^2));
% On trace l'évolution de la distance à l'origine. Pour qu'on voie bien
% l'axe des abcisses, je fais aussi plotter une ligne sur cet axe.
plot (dt*(0:N), les_Rt, [0,T], [0,0], 'black');

return


% Sous-routine 'P'.
    function PX = P (X)
        % La fonction 'P' calcule la matrice 3*3 'PX' que la formule (3)
        % associe au 3-vecteur-ligne 'X'.
        PX = X'*X - eye(3);
        return
    end

end
```

Voici comment évolue la distance à l'origine en fonction du temps sur cette simulation :



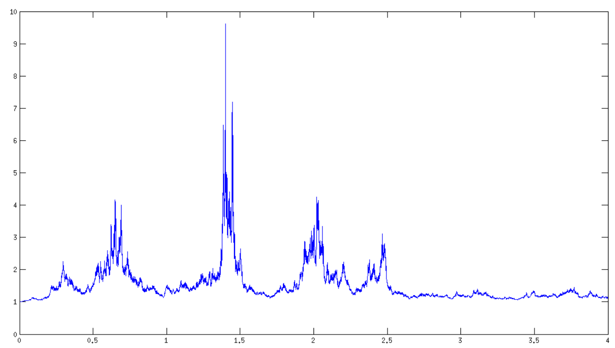
On sent bien que le rayon reste à peu près égal à 1, même s'il y a quelques fluctuations, vraisemblablement dues à l'erreur induite par la discrétisation. Pour nous assurer que c'est bien de là que viennent ces fluctuations, regardons ce qui se passe avec un pas de temps 10 fois plus fin :



En raffinant la discrétisation, on a atténué les fluctuations, ce qui confirme que celles-ci provenaient du schéma d'Euler et non de l'ÉDS (2) en elle-même : pour la véritable ÉDS, on aurait un profil complètement plat !

Question 3

À l'inverse, voici ce qui se passe lorsqu'on oublie de compenser le terme d'Itô. (Il suffit de changer la ligne indiquée dans les commentaires du code précédent). Le graphe est donné ici pour un pas de temps très fin de 1/5 120, afin d'être certains que les fluctuations qu'on observe proviennent bien de la modification de l'ÉDS et non du schéma d'Euler :



Manifestement, le terme de dérive était bien essentiel à ce que la trajectoire reste sur la sphère unité !