

Détaillons le calcul de la probabilité exacte des différentes strates. Commençons par examiner la taille de la strate #1, c.à.d. la probabilité qu'aucun gros sinistre ($> 400\,000$ €) ne survienne. Nous abrègerons ici la valeur de $400\,000$ € en ' S_1 '.

À un instant donné, quel est la probabilité qu'un gros sinistre survienne sur un intervalle de temps infinitésimal dt ? C'est la probabilité qu'un sinistre survienne tout court, soit τdt , multipliée par la probabilité que ce sinistre soit gros sachant qu'il a eu lieu, soit $(S_1/z_0)^{-\kappa}$. Il se produit donc en moyenne $\tau(S_1/z_0)^{-\kappa}$ gros sinistre par unité de temps — et ce, de façon uniforme au cours du temps.

Or, les sinistres surviennent de façon totalement indépendante d'un instant à l'autre, et ce, indépendamment aussi de leurs montants. Par conséquent, les instants de survenue des gros sinistres éventuels sont, par application immédiate de la définition, un processus ponctuel de Poisson, d'intensité $\tau(S_1/z_0)^{-\kappa}$. La loi du nombre de gros sinistres sur la durée T de l'année est donc $Poisson(T\tau(S_1/z_0)^{-\kappa})$, et la probabilité qu'il n'en survienne aucun, d'après la formule pour la loi de Poisson, est donc

$$\exp(-T\tau(S_1/z_0)^{-\kappa}).$$

Une autre façon de voir les choses est de dire que le temps de survenue avant le premier gros sinistre (en supposant qu'on prolonge l'expérience indéfiniment au-delà de la durée T) vérifie exactement la définition d'une loi exponentielle de paramètre $\tau(S_1/z_0)^{-\kappa}$, et d'en déduire la formule d'après la probabilité qu'une exponentielle soit plus grande que T .

Une troisième façon de voir les choses, particulièrement élémentaire, est de considérer qu'on a T/dt événements de la forme « il ne se produit pas de sinistre entre t et $t+dt$ », chacun de ces événements ayant la probabilité $1-\tau(S_1/z_0)^{-\kappa} dt$; et que l'absence de survenue de gros sinistre correspond à la réalisation simultanée de tous ces événements. Comme les événements en question sont indépendants, cette probabilité vaut alors

$$(1 - \tau(S_1/z_0)^{-\kappa} dt)^{T/dt},$$

soit, en posant " $n = T / dt$ " :

$$(1 - T\tau(S_1/z_0)^{-\kappa} / n)^n.$$

Comme n est ici infiniment grand, on peut utiliser la formule asymptotique $(1 + \lambda / n)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^\lambda$ pour en déduire encore une fois la même formule. Cette approche a le mérite de faire comprendre facilement pourquoi la loi "exponentielle", définie comme une loi sans mémoire, a précisément une probabilité... exponentielle de dépasser un seuil donné, ou encore pourquoi la probabilité qu'une variable $Poisson(\theta)$ vaille 0 est $e^{-\theta}$.

Pour la strate #2, notant S_2 le seuil de $800\,000$ €, le même raisonnement que précédemment montre que l'union des strates #1 et #2 a pour probabilité

$$\exp(-T\tau(S_2/z_0)^{-\kappa});$$

comme les strates #1 et #2 sont disjointes, c'est donc que la strate #2 a pour probabilité

$$\exp(-T\tau(S_2/z_0)^{-\kappa}) - \exp(-T\tau(S_1/z_0)^{-\kappa}).$$

Le même argument de complémentation, en encore plus simple, montre également que la probabilité de la strate #3 est

$$1 - \exp(-T\tau(S_2/z_0)^{-\kappa}).$$