

MÉTHODE DE MONTE-CARLO EXERCICES DU 11 MARS 2013

par Rémi Peyre

EXERCICE 1 — File d'attente

Le but de cet exercice est de simuler un phénomène de file d'attente, par exemple à un péage sur l'autoroute, sous une hypothèse d'arrivée poissonnienne des voitures et de traitement poissonnien de leurs requêtes (cette seconde hypothèse est peu réaliste concernant le cas d'un péage, mais bon).

Ce qu'on va simuler est l'évolution au cours du temps (noté t , compté en minutes) du nombre V_t de voitures attendant au péage. Ce nombre de voitures évolue markovienement, avec les règles suivantes. Au cours d'un intervalle de temps dt :

- S'il y a au moins une voiture qui attend, la probabilité qu'une voiture passe (et donc que V_t diminue d'une unité) est αdt , avec $\alpha = 4 \text{ min}^{-1}$;
- La probabilité qu'une nouvelle voiture arrive (et donc que V_t augmente d'une unité) est βdt , où β est la densité du trafic.

En d'autres termes,

$$dV_t = -\mathbf{1}_{V_t > 0} \mathbf{1}_{t \in \mathcal{P}_\alpha} + \mathbf{1}_{t \in \mathcal{P}_\beta}, \quad (1)$$

où $\mathcal{P}_\alpha$ et $\mathcal{P}_\beta$ sont deux processus de Poisson sur $\mathbb{R}_+$ indépendants d'intensités respectives α et β .

1. Sachant la valeur de V_t à un instant donné, quelle est la loi du temps d'attente avant que V_t évolue, et la loi du saut que V_t fera à cet instant ?

2. Écrire un programme simulant $(V_t)_{0 \leq t \leq T}$ (en partant de $V_0 = 0$), les paramètres du programme étant T et β . Lancer les simulations pour $T = 720$ et respectivement $\beta = 0,5\alpha$, $\beta = 0,95\alpha$ et $\beta = 1,05\alpha$. Commenter.

Indication : La fonction `stairs` de MATLAB permet de plotter facilement des fonctions en escalier.

3. (✱) Pour une simulation donnée, exprimer le temps d'attente moyen τ des automobilistes en fonction de $(V_t)_{0 \leq t \leq T}$ (on supposera que $V_T = 0$). Modifier le programme pour qu'il retourne également cette valeur.

4. (✱) Simuler à plusieurs reprises τ avec les jeux de paramètres suivants : $(\beta = 0,5\alpha, T = 720)$, $(\beta = 0,5\alpha, T = 5\,040)$, $(\beta = 0,95\alpha, T = 720)$, $(\beta = 0,95\alpha, T = 5\,040)$. Que constate-t-on ?

5. (★) Expliquer en quoi *chaque* simulation de la méthode précédente s'apparente en fait à une méthode de Monte-Carlo.

6. (★) Trouver une façon d'évaluer l'intervalle de confiance pour la méthode de Monte-Carlo précédemment citée, *sans avoir à répéter les simulations*.

EXERCICE 2 — Une intégrale tridimensionnelle.

On travaille dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. $|\cdot|$ note la norme euclidienne, O le point de coordonnées $(0, 0, 0)$ et A le point de coordonnées $(0, 0, \frac{1}{2})$. Notre but est d'évaluer efficacement l'intégrale :

$$I := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x - O|)}{|x - A|^2} dx. \quad (2)$$

1. (✱) Démontrer que l'intégrale I est bien convergente. Observer que par contre, l'intégrande n'est pas de carré intégrable au voisinage de A .

2. (★) Dédurre de la question précédente qu'il nous sera *à priori* impossible d'utiliser une mesure d'échantillonnage à densité bornée par rapport à la mesure de Lebesgue si nous souhaitons trouver un intervalle de confiance pour I par la méthode habituelle.

Pour pallier l'écueil observé à la question précédente, on se propose d'évaluer comme variable de contrôle $\mathbf{1}_{|x-A|\leq 1}|x-A|^{-2}$.

3. (✿) Calculer $\int \mathbf{1}_{|x-A|\leq 1}|x-A|^{-2} dx$.

4. Grâce à la question précédente, proposer une technique de variable de contrôle "naïve" pour tenter de rendre l'intégrale I de carré localement sommable par rapport à la mesure de Lebesgue.

5. (✿) Montrer que la technique de la question précédente rend *effectivement* l'intégrande de carré sommable.

6. (★) Pourquoi cela n'aurait-il pas eu de sens de proposer d'utiliser la version paramétrée de la variable de contrôle ici ?

7. (★) Proposer une méthode de Monte-Carlo pour évaluer efficacement l'intégrale (en utilisant la variable de contrôle).

Indication : Comme chaque fois qu'on utilise la méthode de Monte-Carlo pour un calcul d'intégrale, il n'y a pas de loi d'échantillonnage canonique ; le choix de la loi d'échantillonnage en est d'autant plus crucial. Ici comme toujours, certaines lois d'échantillonnage sont carrément inacceptables (par exemple un échantillonnage gaussien — pourquoi?), et même parmi les lois acceptables certaines sont plus judicieuses que d'autres. Réfléchissez donc bien au choix de la loi d'échantillonnage que vous prenez (faites preuve d'un peu d'imagination!). Éventuellement, vous pouvez tester plusieurs lois d'échantillonnage pour les comparer entre elles.

EXERCICE 3 — Macro-économie

Un modèle de macro-économie pour la croissance du PIB d'un pays suit l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dC_t = \sigma dW_t + \lambda(\gamma - \gamma^{-1}C_t^2)dt, \quad (3)$$

où C_t représente le taux de croissance (en pourcentage par an) au temps t (compté en années), les paramètres étant $\gamma = 3$, $\lambda = 0,1$ et $\sigma = 0,8$.

1. Simuler le processus $(C_t)_t$ sur 100 ans, en partant de $C_0 = 1$. (On prendra un pas de discrétisation de 1 mois).

La particularité du modèle que nous avons donné est que, si à un moment donné la récession est trop forte (disons, $C_t < -10$), alors le modèle est quasi-assuré de partir en dérapage incontrôlé dans une spirale de crise négative dont il ne sortira jamais.

2. Évaluer par la méthode de Monte-Carlo la probabilité que le système parte en dérapage d'ici un siècle (on considérera que le système est parti en dérapage dès que $C_t < -10$).