MÉTHODE DE MONTE-CARLO
EXERCICES DU 11 FÉVRIER 2013

par Rémi Peyre

EXERCICE 1 — Que d'eau, que d'eau... !

Un agronome souhaite connaitre la quantité de pluie moyenne qui tombe à Nancy en un an. Il se rend donc au centre local de Météo France ; mais c'était à l'époque des débuts de la météo : on avait certes déjà engregistré 1 siècle de météo, mais on n'avait encore aucun traitement informatisé... Tout ce que Météo France savait, c'est que sur 36 524 jours il y avait eu 12 449 jours de pluie. Notre agronome n'ayant pas de temps d'éplucher trente-six-mille fiches, il décide d'en piocher mille au hasard pour se faire une idée, et d'extrapoler à partir de celles-ci.

1. (✿) Formaliser le problème ; et écrire l'estimateur correspondant à la démarche de l'agronome, ainsi que l'intervalle de confiance associé à cet estimateur. (On supposera que le nombre de fiches tirées est suffisamment petit en proportion pour qu'on puisse faire comme s'il y avait indépendance).

2. Quelle technique de réduction de variance l'agronome peut-il utiliser ? Écrire formellement l'estimateur et l'intervalle correpondants.

3. Supposons maintenant que les fiches de Météo France sont rangées dans deux bacs : « jours de pluie » et « jours sans pluie ». Quelle technique de réduction de variance cela suggère-t-il ? Décrire la méthode correspondante, et écrire formellement l'estimateur et l'intervalle de confiance.

4. Faire une simulation des différentes expériences et donner les valeurs numériques associées. (On supposera pour l'application que, les jours où il pleut, la quantité Q de pluie tombée, exprimée en mm, suit une loi telle que $\ln Q \sim 1{,}33 + \mathcal{N}(1)$, Q étant ensuite arrondi à l'entier le plus proche).

EXERCICE 2 — Le coup de la panne

Pour augmenter la durée de vie d'un système électronique embarqué, les ingénieurs qui l'ont conçu ont décidé de tripler le circuit : c'est-à-dire qu'en plus du circuit principal (que nous appellerons n° 1), il y a deux circuits de secours (n° 2 et n° 3), le système fonctionnant tant qu'au moins un des trois circuits est en service. On suppose qu'en l'absence de mauvais coup, les durées de vie des différents circuits sont indépendantes et exponentielles, le circuit 1 ayant une durée de vie typique de 10 ans (càd. de loi Expon(10^{-1})*), et les circuits 2 et 3 resp. de 5 et de 4 ans. Indépendamment de ces problèmes d'usure, le système peut également prendre un "mauvais coup", suivant une loi Expon*(20^{-1})*, qui met d'un seul coup les trois circuits hors service. On appelle* T *la durée de vie globale de la machine (incluant la possibilité d'un mauvais coup) ; on s'intéresse à l'évaluation de* $\mathbb{E}(T)$.

1. (✿) Rappeler comment on simule une loi exponentielle. Écrire une routine simulant T et l'intégrer à une méthode de Monte-Carlo pour le calcul de $\mathbb{E}(T)$.

2. (✿) Si X et Y sont deux v.a. indépendantes de lois respectives *Expon*(λ) et *Expon*(μ), montrer que $\min\{X, Y\}$ suit la loi *Expon*$(\lambda + \mu)$.

3. (✿) On appelle T_1, T_2, T_3 les durées de vie respective des circuits 1, 2 et 3. Calculer exactement $\mathbb{E}(T_1), \mathbb{E}(T_2), \mathbb{E}(T_3)$.

4. Utiliser la variable de contrôle T_1 (version rudimentaire) pour améliorer l'efficacité du calcul de $\mathbb{E}(T)$. Implémenter et commenter.

5. Même question avec la version paramétrée de la variable de contrôle.

6. Même question en utilisant les trois variables de contrôle T_1, T_2, T_3.

EXERCICE 3 — Achat au choix

Un investisseur souhaite acheter une option qui lui permettra, dans un an, d'acquérir un ordinateur. S'il ne prend pas cette option, il pourra toujours acheter l'ordinateur dans un an, sachant qu'il y a trois fabricants : « X–X' », « Y & C^ie » et « Z S.A. » (les trois modèles étant identiques en qualité). Il y a un incertitude sur les prix qu'auront les trois modèles dans un an (prix appelés respectivement X*,* Y *et* Z*), qu'on peut modéliser ainsi :* $(\ln X, \ln Y, \ln Z)$ *suit la loi*

$$(\ln 800, \ln 1\ 000, \ln 1\ 200) + \mathcal{N}\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Le prix qu'aurait à débourser notre investisseur sans l'option serait ainsi $\min\{X, Y, Z\} =: P$ *; pour savoir si l'achat de l'option vaut le coup, il doit alors comparer le prix de celle-ci à* $\mathbb{E}(P)$*, qu'on va donc essayer maintenant d'évaluer.*

1. (✿) Écrire une routine simulant (X, Y, Z). S'en servir pour implémenter une méthode de Monte-Carlo pour l'évaluation de $\mathbb{E}(P)$.
Indication : Pour simuler un vecteur gaussien, penser à la méthode de Cholesky.

2. (★) Proposer une méthode de variables antithétiques pour améliorer l'efficacité du calcul de $\mathbb{E}(P)$. L'implémenter et comparer à la méthode de Monte-Carlo "naïve".

EXERCICE 4 — Maximum d'une marche aléatoire

On considère une marche aléatoire de 60 pas sur $\mathbb{R}$ *issue de* 0 *dont les incréments sont de loi* $\mathcal{N}(1)$ *; autrement dit, pour* $(S_j)_{1\leqslant j\leqslant 60}$ *des v.a. i.i.d.* $\mathcal{N}(1)$*, on considère la suite finie* $(X_i)_{0\leqslant i\leqslant 60}$ *définie par* $X_j = \sum_{j=1}^{i} S_j$*. On définit la variable aléatoire* $X_*(\omega) := \max_{0\leqslant i\leqslant 60} X_i(\omega)$*. Notre but est d'évaluer* $\mathbb{E}(X_*)$*.*

En première approximation, on peut considérer que le comportement que $(X_i)_i$ *au cours du temps est à peu près linéaire, ce qui suggère d'utiliser comme variable de contrôle* $\max\{0, X_{60}\} =: Y$*.*

1. (✿) Calculer exactement $\mathbb{E}(Y)$.

2. Implémenter la méthode de Monte-Carlo pour calculer $\mathbb{E}(X_*)$ avec utilisation de la variable de contrôle Y (version rudimentaire).

3. (✿) Comparer avec la méthode de Monte-Carlo "naïve". Quel est le gain d'efficacité par simulation qu'apporte l'utilisation de la variable de contrôle ? Le temps de calcul supplémentaire induit par l'utilisation de la variable de contrôle est-il conséquent ?

4. Implémenter la version paramétrée de l'utilisation de la variable de contrôle Y. Comparer avec la version rudimentaire. Le gain d'efficacité est-il important ?

5. (★) Pourquoi on pouvait s'attendre à la réponse au dernier item de la question précédente ?

6. (✿) Montrer que la marche $(-X_i)_{0\leqslant i\leqslant 60}$ a la même loi que $(X_i)_i$. On note X^* le maximum de la marche $(-X_i)_i$. À votre avis, le corrélation entre X_* et X^* sera-t-elle plutôt positive ou négative ?

7. Déduire de la question précédente une technique de variables antithétiques pour le calcul de $\mathbb{E}(X_*)$. Implémenter cette méthode et comparer les résultats à la méthode de Monte-Carlo "naïve".