

# MÉTHODES DE MONTE-CARLO

## EXERCICES DU 4 FÉVRIER 2013

par Rémi Peyre

### EXERCICE 1 — Mathématiques expérimentales

1. Si  $\mathbb{P}$  est une loi de probabilité sous laquelle la variable  $X$  suit la loi  $\mathcal{N}(1)$ , écrire un programme MATLAB évaluant  $\mathbb{E}(X^4)$  par la méthode de Monte-Carlo.

*Indication* : Les lois normales peuvent être simulées à l'aide de la fonction `randn` de MATLAB. Consulter « doc `randn` » pour plus de détails.

2. Modifier le programme pour que celui-ci retourne aussi un intervalle de confiance à 98 %.

3. (★) Conjecturer la valeur exacte de  $\mathbb{E}(X^4)$ . Démontrer votre conjecture, de préférence sans utiliser le calcul intégral.

4. Modifier le programme pour exploiter le parallélisme de MATLAB en effectuant les simulations par paquets de 20. Comparer les efficacités.

*Indication* : Les fonctions `tic` et `toc` de MATLAB permettent de mesurer la durée d'un calcul.

### EXERCICE 2 — Manque d'intégrabilité $L^2$

On considère une loi  $\mathbb{P}$  sous laquelle la variable  $X$  suit une loi  $Pareto(1,5)$ , c'est-à-dire que  $X$  est une variable aléatoire sur  $[1, \infty)$  telle que pour tout  $x \geq 1$ ,  $\mathbb{P}(X \geq x) = x^{-1,5}$ .

1. Caculer la densité de la loi  $Pareto(1,5)$  par rapport à la mesure de Lebesgue. En déduire que  $X$  est  $L^1$  mais pas  $L^2$ , et calculer  $\mathbb{E}(X)$ .

2. Écrire un programme MATLAB qui tente d'évaluer un intervalle de confiance à 90 % de  $X$  en faisant comme si celle-ci était de classe  $L^2$ . Connaissant la vraie valeur de  $\mathbb{E}(X)$ , cet intervalle de confiance est-il fiable? Faire afficher au programme sa soi-disant « efficacité » ; regarder comment celle-ci varie d'une simulation à l'autre, ainsi que quand le nombre de simulations augmente.

### EXERCICE 3 — Probabilité d'un brelan

Au poker (variante dite « fermée »), le joueur reçoit 5 cartes au sein d'un sabot contenant 4 cartes de chacun des 13 « hauteurs » possibles. Puis il décide d'échanger entre 0 et 3 cartes en vue d'améliorer sa main. Une combinaison intéressante est d'obtenir un brelan, c'est-à-dire (au moins) trois cartes de même hauteur.

1. Évaluer la probabilité qu'un joueur dont le seul but est d'obtenir un brelan atteigne son objectif. On exprimera le résultat sous la forme d'un intervalle de confiance à 2 sigmas.

2. Mettez votre résultat en commun avec celui de vos camarades pour obtenir un intervalle de confiance plus précis sans avoir à lancer de simulations supplémentaires.

*Indication* : On veillera à ce que les différentes machines aient utilisé des graines aléatoires distinctes avant de lancer leurs simulations, à l'aide de la fonction `rng`.