École des Mines de Nancy, année 2012–13

Méthode de Monte-Carlo & Application aux processus aléatoires
Examen, seconde session

mardi 21 mai 2013

PROBLÈME 1 — Simulation du cours d'un actif

Dans le modèle de Black & Scholes, le cours d'un actif, noté $(P_t)_{t\geqslant 0}$, évolue selon un mouvement brownien géométrique :

$$dP_t = \sigma P_t dW_t + (\tfrac{1}{2}\sigma^2 + r)P_t dt. \tag{1}$$

Nous allons dans ce problème étudier un modèle plus élaboré dans lequel le "paramètre" σ devient variable. Ce modèle est décrit par le système d'équations différentielles stochastiques suivant :

$$\begin{cases} dP_t &= \sigma_t P_t dW_t^{(1)} + (r + \tfrac{1}{2}\sigma_t^2)P_t dt\,; \\ d\sigma_t &= A\sigma_t dW_t^{(2)} + \tfrac{1}{2}A^2\sigma_t dt - B\ln(\sigma_t/C)\sigma_t dt, \end{cases} \tag{2}$$

*où $W^{(1)}$ et $W^{(2)}$ sont des mouvement brownien (standard) indépendants et r, A, B et C sont les paramètres du modèle. Dans ce problème, en prenant pour unités de base l'euro (€) et l'année (*an*), on utilisera les valeurs numériques suivantes : $r = 0{,}05$, $A = 1{,}2$, $B = 4$ et $C = 0{,}3$. Les conditions initiales seront prises à $P_{t=0} = 100$ et $\sigma_{t=0} = 0{,}2$.*

1. Préciser l'homogénéité physique des différentes quantités intervenant dans le modèle (2) ; et interpréter la signification de σ_t ainsi que des différents paramètres.

2. Simuler l'évolution du cours de l'actif sur l'intervalle de temps $[0, T]$, où l'échéance T vaut 2 ans.

3. À l'aide de la méthode de Monte-Carlo, évaluer la probabilité que P_T dépasse $K := 150$ €. On précisera l'intervalle de confiance à 2 sigmas.

La formule d'Itô établit que, si le processus X_t suit une équation différentielle de la forme

$$dX_t = \alpha_t dW_t + \beta_t dt, \tag{3}$$

alors $Y_t := \ln X_t$ suit l'équation différentielle :

$$dY_t = \frac{\alpha_t}{X_t}dW_t + \left(\frac{\beta_t}{X_t} - \frac{\alpha_t^2}{2X_t^2}\right)dt. \tag{4}$$

4. On pose $L_t := \ln P_t$. À l'aide de la formule d'Itô, écrire le système d'équations différentielles stochastiques suivi par L_t et σ_t.

5. Conditionnellement à la donnée de l'ensemble de la trajectoire $(\sigma_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$, quelle est la loi de L_T ? En déduire, toujours conditionnellement à $(\sigma_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$, la probabilité que P_T dépasse K — On exprimera le résultat à l'aide de la fonction spéciale appelée « fonction d'erreur », obtenue sous MATLAB par la commande `erf`.

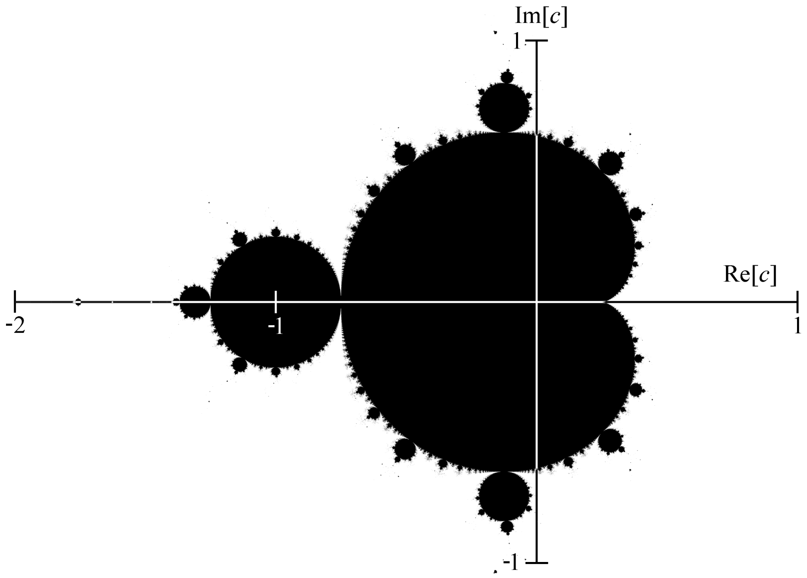

FIGURE 1 – L'ensemble de Mandelbrot.

6. Déduire de la question précédente une technique de réduction de la variance pour évaluer la probabilité que P_T dépasse K. Implémenter cette technique et commenter l'amélioration obtenue.

PROBLÈME 2 — L'ensemble de Mandelbrot

Pour $c \in \mathbb{C}$, on définit la suite complexe $(u_n)_{n\geqslant 0}$ (laquelle dépendra implictement de c) par récurrence par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0\,; \\ u_{n+1} & = & (u_n)^2 + c. \end{array}\right. \tag{5}$$

Le célèbre ensemble de Mandelbrot *(voir fig. 1) est alors l'ensemble $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}$ des valeurs de paramètres pour lesquelles la suite $(u_n)_n$ est bornée. Le but de cet exercice est d'évaluer l'aire de $\mathcal{M}$, dont les mathématiciens ne connaissent toujours aucune valeur analytique à l'heure actuelle.*

7. Au vu de la figure 1, justifier qu'il puisse être pertinent de recourir à la méthode de Monte-Carlo pour évaluer l'aire de $\mathcal{M}$.

8(facultatif). Démontrer que $c \notin \mathcal{M}$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| > 2$.
Indication : Il sera avisé de traiter séparément les cas $|c| \leqslant 2$ et $|c| > 2$. Dans le second cas, on pourra commencer par raisonner à une valeur fixée de $|c|$, par exemple $|c| = 3$.
☛ *Dans la suite du problème, on admettra le résultat de la question 8. En particulier, pour savoir si $c \in \mathcal{M}$, il suffit de savoir si la suite $(u_n)_n$ est bornée par 2 en valeur absolue. On fera l'approximation que, si aucun des 1 500 premiers termes de la suite $(u_n)_n$ ne dépasse 2 en valeur absolue, alors la suite est bornée.*

9. Proposer une méthode de Monte-Carlo simple pour évaluer l'aire de $\mathcal{M}$, et l'implémenter. On précisera l'intervalle de confiance à 2 sigmas.

10. Proposer l'idée générale d'une technique de stratification "à priori" simple pour améliorer la méthode de la question précédente.

11. Calculer des paramètres pertinents pour la technique de stratification imaginée à la question précédente.

12. Implémenter la technique de stratification et commenter le gain d'efficacité obtenu.