MÉTHODES DE MONTE-CARLO
CORRIGÉ DE L'EXERCICE 8 DE L'ANNALE

par Rémi Peyre

EXERCICE 8 — Entraînement au conditionnement

Un industriel modélise le rendement de sa production en fonction de trois paramètres réels x, y et z : la quantité qu'il produit par heure dépend de ces trois paramètres selon

$$\frac{e^{y+z}}{1+|x|^{0,4}}. \tag{1}$$

Sachant que le triplet (x, y, z) suit une loi normale centrée de matrice de covariance est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 1 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

notre industriel se demande quel est son rendement moyen, noté ρ.

1. (✿) Évaluer ρ par une méthode de Monte-Carlo « naïve ».
Indication : On simulera (x, y, z) par la méthode de Cholesky, expliquée oralement en TP.

Corrigé. Le programme suivant est un corrigé possible. Je ne l'ai pas commenté, attendu que où vous en avez déjà vu plusieurs de semblables.

```
function rho_naif(N)
Covariances = [1,.2,.1;.2,1,.5;.1,.5,1];
R = chol(Covariances);
S = 0;
S2 = 0;
for i = 1:N
xyz = randn(1,3) * R;
rendement = exp(xyz(2)+xyz(3))/(1+(abs(xyz(1)))^0.4);
S = S + rendement;
S2 = S2 + rendement * rendement;
end
rho = S / N;
sigma = sqrt(S2 / N - rho * rho);
erreur = 2 * sigma / sqrt(N);
disp(['Rendement moyen : ',num2str(rho),' ± ',num2str(erreur)]);
return
end
```

L'exécution m'a donné :

```
>> tic;rho_naif(100000);toc
Rendement moyen : 2.4312 ± 0.057888
Elapsed time is 7.50138 seconds.
```

✓

2. (★) Conditionnellement à x, quelle est la loi de (y, z) ?

Corrigé. Le vecteur (X, Y, Z) étant gaussien centré, on sait que la loi conditionnelle de (Y, Z) par rapport à $\{X = x\}$ va être de la forme $xA + B$, pour A un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et B une matrice 2×2. Notant

$$\begin{pmatrix} 1 & C \\ C^\top & W \end{pmatrix} \tag{3}$$

la décomposition par blocs de la matrice de covariances $\operatorname{Var}(X, Y, Z)$, les calculs de la fiche sur le conditionnement gaussien montrent qu'on a $A = C$ et $B = W - C^\top C$, qui sont des valeurs calculables explicitement. ✓

3. Calculer explicitement

$$\mathbb{E}\bigg(\frac{e^{Y+Z}}{1+|X|^{0,4}} \;\bigg|\; X = x\bigg). \tag{4}$$

Corrigé. Conditionnellement à $\{X = x\}$, X est constant égal à x, donc déjà

$$\mathbb{E}\bigg(\frac{e^{Y+Z}}{1+|X|^{0,4}} \;\bigg|\; X = x\bigg) = \frac{\mathbb{E}(e^{Y+Z} \mid X = x)}{1+|x|^{0,4}}. \tag{5}$$

D'autre part, sous $\mathbb{P}(\cdot \mid X = x)$, nous avons calculé à la question précédente que (Y, Z) était un vecteur gaussien de moyenne xA et de variance B. Par conséquent variable $Y + Z = (1, 1) \times (Y, Z)^\top$ est gaussienne, et ses paramètres sont

$$\mathbb{E}(Y + Z \mid X = x) = (1, 1)\mathbb{E}(Y, Z \mid X = x)^\top = (1, 1)C^\top x \tag{6}$$

et

$$\operatorname{Var}(Y+Z|X = x) = (1, 1) \operatorname{Var}(Y, Z|X = x)(1, 1)^\top = (1, 1)(W - C^\top C)(1, 1)^\top. \tag{7}$$

Or on peut calculer explicitement l'espérance de l'exponentielle d'une variable gaussienne :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big(e^{m+\mathcal{N}(\sigma^2)}\big) &= \int_{\mathbb{R}} e^{m+x} \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}}\, dx = e^m \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2\sigma^2+x} \frac{dx}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \\ &= e^{m+\sigma^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2\sigma^2+x-\sigma^2/2} \frac{dx}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} = e^{m+\sigma^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-\sigma^2)^2/2\sigma^2} \frac{dx}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \\ &= e^{m+\sigma^2/2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Au final, il ressort des considérations ci-dessus que

$$\mathbb{E}\bigg(\frac{e^{Y+Z}}{1+|X|^{0,4}} \;\bigg|\; X = x\bigg) = \frac{e^{\sigma^2/2} \exp(px)}{(1+|x|^{0,4})}, \tag{9}$$

où $p = (1, 1)C^\top$ et $\sigma^2 = (1, 1)(W - C^\top C)(1, 1)^\top$, qui sont des quantités explicitement calculables. ✓

4. En déduire une technique de conditionnement pour évaluer ρ plus efficacement.

Corrigé. Dans la technique de conditionnement, nous allons évaluer la moyenne de l'espérance conditionnelle sachant la valeur de x, qu'on calculera par (9). Comme il n'y a besoin que de connaitre x et pas (y, z) pour cela, on pourra se contenter de simuler X, dont la loi est $\mathcal{N}(1)$; ce qui sera bien plus simple que de simuler (X, Y, Z). Ainsi on s'attend à gagner non seulement en termes de variance mais aussi en termes de cout par simulation. ✓

5. Implémenter cette technique de conditionnement.

Corrigé. Voici un corrigé, où j'ai commenté les points spécifiques au conditionnement.

```
function rho_cond(N)
Covariances = [1,.2,.1;.2,1,.5;.1,.5,1];
% On calcule les paramètres qui interviendront dans l'expression de l'espérance
% conditionnelle. Ces paramètres ne changeant pas au cours de la boucle, il faut
% les calculer en-dehors de celle-ci afin de gagner du temps.
C = Covariances(1,2:3);
W = Covariances(2:3,2:3);
p = [1,1] * C';
sgm2 = [1,1] * (W - C' * C) * [1,1]';
facteur = exp(sgm2 / 2);
S = 0;
S2 = 0;
for i = 1:N
% Cette fois-ci, il suffit de simuler x.
x = randn(1);
% "rendement" désigne cett fois-ci le rendement moyen conditionnellement à la
% valeur de x.
rendement = facteur * exp(p * x) / (1 + (abs(x))^0.4);
S = S + rendement;
S2 = S2 + rendement * rendement;
end
% La fin est la même que quand on ne conditionne pas; toutefois l'écart-type ne
% sera pas le même, attendu qu'on ne calcule pas l'espérance de la même
% variable.
rho = S / N;
sigma = sqrt(S2 / N - rho * rho);
erreur = 2 * sigma / sqrt(N);
disp(['Rendement moyen : ',num2str(rho),' ± ',num2str(erreur)]);
return
end
```

À l'exécution, j'obtiens

```
>> tic;rho_cond(100000);toc
Rendement moyen : 2.4825 ± 0.0045109
Elapsed time is 5.4704 seconds.
```

On gagne un facteur 1,4 en vitesse par simulation et un facteur 13 sur la largeur de l'écart-type, soit globalement un gain d'efficacité de plus de 200.

✓