MÉTHODES DE MONTE-CARLO
EXERCICES DU 5 MARS 2012

par Rémi Peyre

EXERCICE 8 — Entraînement au conditionnement

Un industriel modélise le rendement de sa production en fonction de trois paramètres réels x, y et z :[*] *la quantité qu'il produit par heure dépend de ces trois paramètres selon*

$$\frac{e^{y+z}}{1+|x|^{0,4}}. \tag{1}$$

Sachant que le triplet (x, y, z) suit une loi normale centrée de matrice de covariance est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 1 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

notre industriel se demande quel est son rendement moyen, noté ρ.

1. (✿) Évaluer ρ par une méthode de Monte-Carlo « naïve ».

Indication : On simulera (x, y, z) par la méthode de Cholesky, expliquée oralement en TP.

2. (★) Conditionnellement à x, quelle est la loi de (y, z) ?

3. Calculer explicitement [†]

$$\mathbb{E}\left(\frac{e^{Y+Z}}{1+|X|^{0,4}} \,\middle|\, X = x\right), \tag{3}$$

où il est sous-entendu que la loi de (X, Y, Z) sous $\mathbb{P}$ est celle de notre triplet de paramètres.

4. En déduire une technique de conditionnement pour évaluer ρ plus efficacement.

5. Implémenter cette technique de conditionnement.

EXERCICE 9 — Entraînement à la stratification

Dans cet exercice, on cherche à évaluer l'intégrale

$$I := \int_0^\infty \frac{\sin(2\pi/x)}{x^{1/4}}\,dx \tag{4}$$

par la méthode de Monte-Carlo. [‡]

1. Démontrer que l'intégrale (4) est absolument convergente.

2. Proposer une méthode de Monte-Carlo pour évaluer I, et l'implémenter.

[∗]. Disons par exemple que notre industriel est un métallurgiste, et que x représente la qualité de l'équilibre entre les différents ingédients du mélange, y la température dans le fourneau et z la pression.

[†]. Quand je dis « explicitement », cela autorise quand même que certains paramètres n'aient pas d'expression analytique simple, du moment que MATLAB sache les calculer exactement (aux erreurs d'arrondi près s'entend).

[‡]. Bien que l'intégrale soit de dimension 1 et que la fonction à intégrer soit régulière, ce n'est pas une idée totalement idiote dans la mesure où la régularité de la fonction à intégrer dégénère près de 0, de sorte qu'il devient difficile de contrôler ses oscillations.

On pose

$$I_1 := \int_0^1 \frac{\sin(2\pi/x)}{x^{1/4}}\,dx\,; \qquad I_2 := \int_1^\infty \frac{\sin(2\pi/x)}{x^{1/4}}\,dx. \tag{5}$$

3. Proposer deux méthodes de Monte-Carlo *judicieuses* pour évaluer I_1 et I_2. Implémenter ces méthodes et évaluer leurs efficacités.

4. En déduire une technique de stratification (et plus précisément de stratification *a priori*) pour évaluer I. Optimiser l'échantillonnage interstrates et implémenter la méthode.

EXERCICE 10 — Un exercice avec des variables antithétiques

On cherche à évaluer, pour (x,y,z,t) *suivant la loi* $\mathcal{N}(\mathbf{I}_4)$ *:*

$$\Delta := \mathbb{E}\left((3+2x^2)^{1/2}(6+y^2)^{1/2} - (4+z^2)^{1/2}(5+2y^2)^{1/2}\right). \tag{6}$$

1. **(★)** Par des manipulations judicieuses, réécrire Δ sous une forme qui permette l'application de la méthode des variables antithétiques.

2. Implémenter la méthode en question.

3. **(✿)** Comparer à la méthode de Monte-Carlo « naïve ». Commenter.