MÉTHODES DE MONTE-CARLO
EXERCICES DU 27 FÉVRIER 2012

par Rémi Peyre

EXERCICE 5 — Le tournoi de tennis

16 joueurs de tennis s'affrontent dans un tournoi à élimination directe, le tableau étant composé aléatoirement. Ces joueurs sont numérotés de #1 à #16, #1 étant le joueur le plus fort et #16 le plus faible. Lorsque le joueur #n dispute un match, son niveau au cours de cet match est aléatoire (car il y a des jours avec et des jours sans), suivant la loi $\mathcal{N}(-\ln i; 0{,}5)$ *— on décrit ici le « niveau » d'un joueur par un paramètre dans* $\mathbb{R}$*, d'autant plus grand que le joueur joue bien — : de la sorte, le joueur le mieux classé est celui qui a le plus de chances de gagner un match, mais le joueur le moins bien classé a ses chances quand même. Un exemple (tiré aléatoirement) de ce que peut donner un tel modèle de tournoi est donné dans l'illustration ci-dessous — je précise que dans notre modèle, le niveau d'un même joueur d'un match à l'autre est indépendant.*

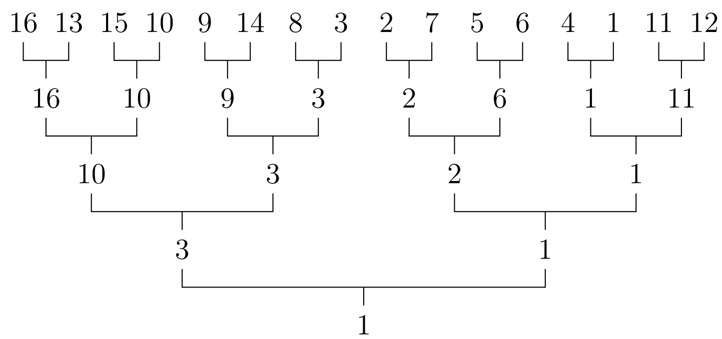

FIGURE 1 – Exemple de tournoi. Ici, il y a eu deux surprises au premier tour, où #16 a battu #13 et #6 a battu #5. Hélas pour #16 et #6, leur chance a ensuite tourné au second tour, où ils n'ont pas renouvelé leur performance (cela aurait d'ailleurs été d'autant plus difficile que leurs adversaires au second tour étaient plus redoutables qu'au premier). Plus généralement, à partir du second tour la hiérarchie a toujours été respectée, et en particulier c'est logiquement #1 qui s'est imposé. Notez que les hasards du tableau ont fait que #3 est arrivé en finale sans avoir eu à affronter d'adversaire mieux classé que lui, alors que #2 a été éliminé par #1 en demi-finale.

Un bookmaker souhaite établir la cote du joueur #16 pour ce tournoi (le tableau n'ayant pas encore été tiré) ; pour cela, il a besoin de déterminer la probabilité, notée p_{16}*, que ce joueur gagne.*

1. Implémenter un algorithme de Monte-Carlo pour évaluer p_{16}.

La convergence de l'algorithme étant très lente, notre bookmaker souhaite améliorer sa précision par échantillonnage préférentiel.

2. (★) Proposer une idée d'échantillonnage préférentiel pour cette situation.

3. Implémenter votre idée.

EXERCICE 6 — Yahtzee avec double réduction de variance

Question. Reprendre le code du yahtzee *avec échantillonnage préférentiel* pour lui appliquer *en plus* la méthode de conditionnement.

EXERCICE 7 — Entraînement aux variables de contrôle

On considère une ville dans laquelle la population est globalement répartie selon une loi $\mathcal{N}(\mathbf{I}_2)$. [*] *On souhaite construire un opéra au point* T *de coordonnées* $(1,0)$ *(voir figure 2). L'urbaniste, qui est sensible aux problèmes d'écologie, se demande quelle est la distance moyenne que les habitants auront à parcourir pour se rendre à l'opéra ; autrement dit, elle veut calculer*

$$D := \mathbb{E}_{\mathcal{N}(\mathbf{I}_2)}(\|T - X\|), \tag{1}$$

où $\|\cdot\|$ *est la distance euclidienne.*

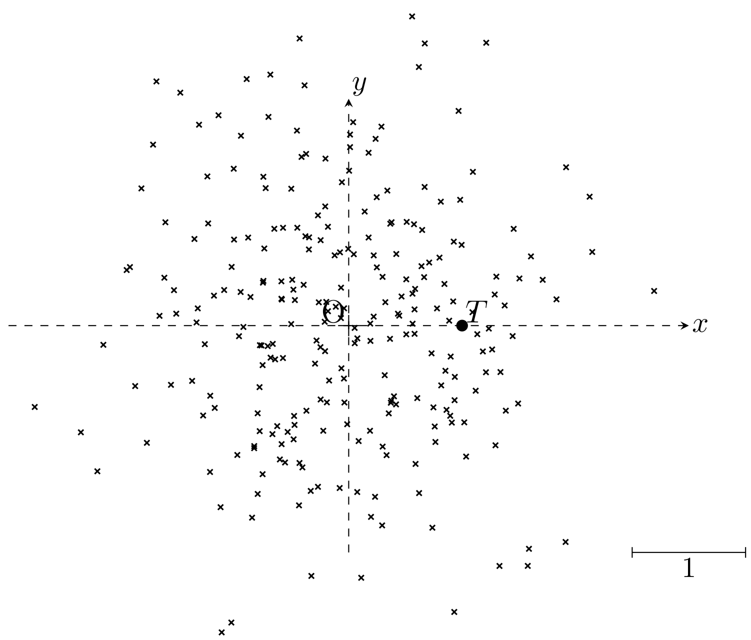

FIGURE 2 – Le système de coordonnées, l'emplacement du futur théâtre et la répartition des habitants.

1. (✿) Écrire un algorithme de Monte-Carlo « naïf » pour évaluer D.

2. Utiliser la méthode des variables de contrôle pour améliorer l'algorithme. Je vous propose d'utiliser une ou plusieurs des variables de contrôle suivantes : x, x^2, $|x|$, y, y^2 et $|y|$.

[*]. Disons que l'unité de longueur correspond à 5 km.