

MÉTHODES DE MONTE-CARLO

EXERCICES DU 13 FÉVRIER 2012

par Rémi Peyre

EXERCICE 1 — Mise en jambes

On cherche à calculer par la méthode de Monte-Carlo l'intégrale

$$I := \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx \quad (1)$$

— ceci étant uniquement dans un but pédagogique, vu qu'une telle intégrale peut être calculée explicitement comme égale à 1, et que de toutes façons la méthode de Monte-Carlo n'est pas indiquée pour évaluer une intégrale de fonction régulière en petite dimension.

1. Évaluer I à l'aide de l'échantillonnage uniforme sur $(0, \pi/2)$. On écrira sous MATLAB une fonction prenant en argument le nombre de simulation souhaitées, qui quand on l'exécute affiche son évaluation de I .

2. Même question avec la loi d'échantillonnage sur $(0, \pi/2)$ de densité proportionnelle à x .

3. Même question avec la loi d'échantillonnage sur $(0, \pi/2)$ de densité proportionnelle à x^4 .

4. Reprendre les trois programmes que vous venez d'écrire pour y calculer aussi un intervalle de confiance à 90 %.

5. Reprendre encore les trois programmes pour évaluer leur efficacité. Comparer les efficacités pour les différents échantillonnages et commenter.

6. (★) Où était le piège ?

EXERCICE 2 — Probabilité d'un cône

On note ici $\mathbb{P}$ la loi normale tridimensionnelle standard $\mathcal{N}(\mathbf{I}_3)$. On note C le cône de révolution de sommet $S := (2, 0, 0)$, d'axe orienté vers les x positifs, et d'angle au sommet 120° , autrement dit l'ensemble des points M de l'espace tel que l'angle $\widehat{MSx}$ soit inférieur à 60° [voir figure 1]. Le but de cet exercice est d'évaluer $\mathbb{P}(C) =: \Pi$.

1. Écrire une fonction qui, à partir des trois coordonnées d'un point M , renvoie vrai (ou 1) si $M \in C$ et faux (ou 0) sinon.

Indication : Se rappeler comment on peut calculer l'angle entre deux vecteurs.

2. Appliquer la méthode de Monte-Carlo « naïve » pour évaluer, pour un nombre de simulations N entré en paramètre, un intervalle de confiance à 2 sigmas (soit une confiance de 95,4 %) de Π .

Pour $\alpha > 0$, on note maintenant $\mathbb{P}_\alpha$ la loi normale décentrée $\mathcal{N}(\alpha \vec{e}_1, \mathbf{I}_3)$, où $\alpha \vec{e}_1$ désigne le point de coordonnées $(\alpha, 0, 0)$.

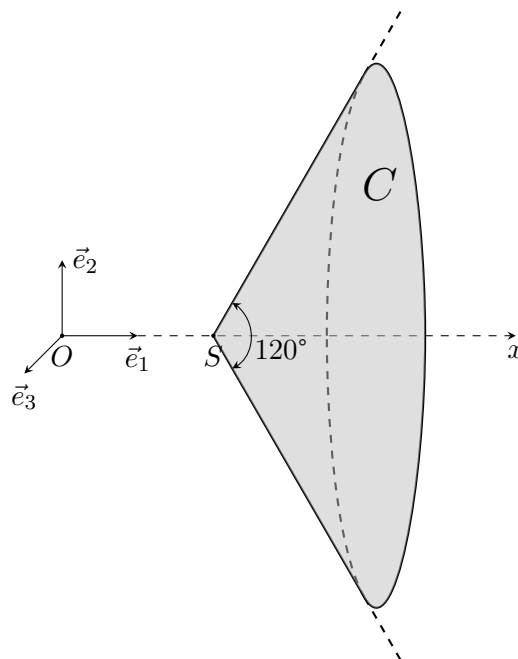
3. Quelle est la densité de la loi $\mathbb{P}_\alpha$ par rapport à la mesure de Lebesgue ?

4. Écrire Π comme une espérance sous $\mathbb{P}_\alpha$.

Indication : On pourra commencer par écrire Π comme une intégrale sur $\mathbb{R}^3$.

5. En déduire un algorithme utilisant l'échantillonnage préférentiel pour évaluer Π . L'algorithme prendra deux paramètres : α , et le nombre de simulations demandées.

6. Comparer les efficacités de l'algorithme « naïf » et de l'algorithme préférentiel pour $\alpha = 2$, $\alpha = 3$ et $\alpha = 4$. Commenter.

FIGURE 1 – Le cône C , en gris (en fait infini).**EXERCICE 3 — Grandes déviations d'un tirage à pile ou face**

Soit $\mathbb{P}$ la loi de probabilité correspondant à 100 lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée, et soit X la variable aléatoire comptant le nombre de "pile" à l'issue de ces lancers. On cherche ici à calculer avec précision la valeur de $\mathbb{E}((X - 60)_+) =: R$, où $a_+ := \max(x, 0)$ désigne la partie positive d'un nombre $a \in \mathbb{R}$.

1. Écrire un algorithme « naïf » calculant un intervalle de confiance à 2 sigmas (soit 95,4 % de confiance) pour R , qui prendra en paramètre le nombre N de simulations à effectuer.

2. (★) Modifier cet algorithme pour qu'il choisisse automatiquement N de façon à ce que l'intervalle de confiance ait une erreur relative inférieure à 4 %. Le programme devra essayer de déterminer N *a priori* plutôt que de vérifier après chaque étape si la précision requise est atteinte.

On note maintenant $\mathbb{P}'$ la loi de probabilité correspondant à 100 lancers successifs d'une pièce pipée qui a une probabilité 0,6 de tomber sur "pile" à chaque lancer.

3. Quelle est la densité de $\mathbb{P}'$ par rapport à $\mathbb{P}$?

4. En déduire un algorithme d'échantillonnage préférentiel pour le calcul de R .

5. Comparer les temps de calculs nécessaires pour calculer R avec la précision requise.

6. Que vaudrait R si la variable X était distribuée exactement comme le prétend le théorème-limite central ? Comparer à l'intervalle que vous venez de calculer.

EXERCICE 4 — Échantillonnage préférentiel du yahtzee

Question. (★) Reprendre le problème de yahtzee (dont les codes-sources sont donnés en annexe du cours) pour lui appliquer un échantillonnage préférentiel.

Indication : On pourra commencer par observer que, sous réserve que le joueur choisisse les dés qu'il garde uniformément parmi les ex-æquo éventuels (ce qui n'est

pas le cas dans la version du cours !), la probabilité d'obtenir un yahtzee est 6 fois la probabilité d'obtenir un yahtzee de "six". Dès lors, pour faire un échantillonnage préférentiel favorisant les yahtzee de "six", une idée consiste à piper les dés pour qu'ils tombent plus souvent sur "six" que sur un autre chiffre. Il faut ensuite calculer la densité de probabilité du déroulement des lancers avec de tels dés par rapport à des dés non pipés pour pouvoir écrire la quantité recherchée comme une espérance sous la loi des dés pipés. Notez que dans cette méthode, le paramètre de pipage est fixé librement ; vous pouvez donc essayer plusieurs valeurs de celui-ci pour voir laquelle conduit à la plus petite variance.