

Mémoire sur la loi de Pareto

par R. Peyre

11 mars 2012

1.a Définition. Pour $k \in (0, \infty)$, la loi de Pareto de paramètre k , notée $\mathcal{P}areto_k$, est la loi sur $(1, +\infty)$ définie par

$$\mathbb{P}(X \geq x) = x^{-k}. \quad (1)$$

1.b Remarque. Quand $k \rightarrow \infty$, la loi $\mathcal{P}areto_k$ converge faiblement vers δ_1 (la masse de Dirac en 1). Si on travaille dans la droite réelle achevée $\bar{\mathbb{R}}$, on a aussi que quand $k \rightarrow 0$, $\mathcal{P}areto_k$ converge faiblement vers $\delta_{+\infty}$.

1.c Proposition. Pour $k \in (0, \infty)$, la loi de Pareto a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, qui est

$$\frac{d\mathcal{P}areto_k}{dx} = \mathbf{1}_{x>1} k x^{-(k+1)}. \quad (2)$$

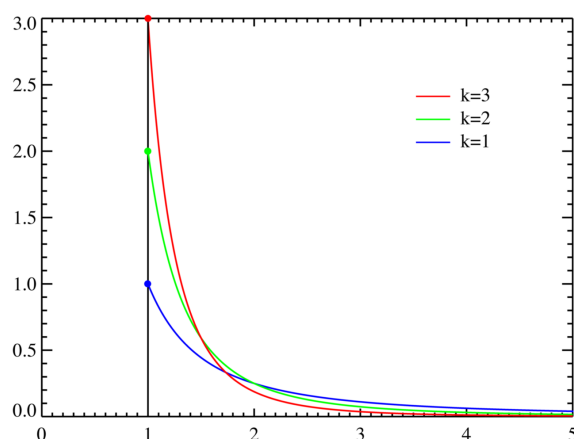


FIGURE 1 – Densité de la loi de Pareto pour quelques valeurs de k . (source : Wikipédia).

Démonstration. La (limite à gauche de la) fonction de répartition de la loi $\mathcal{P}areto_k$ est $\mathbb{P}_{\mathcal{P}areto_k}(X < x) = 1 - \mathbb{P}(X < x) = \mathbf{1}_{x>1}(1 - x^{-k})$. Cette fonction étant continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, sa dérivée donne la densité de $\mathcal{P}areto_k$ $\square$

1.d Proposition. Les moments (polynomiaux) de la loi $\mathcal{P}areto_k$ sont infinis à partir de l'ordre k , càd. que pour $l \geq 0$,

$$(\mathbb{E}_{\mathcal{P}areto_k}(|X|^l) < \infty) \Leftrightarrow (l < k). \quad (3)$$

Démonstration. Immédiat à partir de la proposition 1.c. $\square$

2.a Remarque. On appelle généralement *lois à queues lourdes* les lois qui, comme la loi de Pareto, ont leurs moments infinis à partir d'un certain ordre ; c'est en particulier le cas quand la densité de la loi décroît comme un polynôme en l'infini. On peut dire que « la loi de Pareto est l'archétype de la loi à queues lourde », dans la mesure où c'est précisément une loi conçue pour avoir une queue lourde, dont les propriétés sont très simples à calculer et dont la simulation est très facile (voir la proposition 2.b ci-dessous).

2.b Proposition (simulation d'une loi de Pareto). *Si U est une variable aléatoire uniforme sur $(0, 1)$, alors $U^{-1/k}$ suit la loi $\mathcal{Pareto}_k$.*

Démonstration. $U^{-1/k}$ est bien à valeurs dans $(1, +\infty)$, et

$$\mathbb{P}(U^{-1/k} \geq x) = \mathbb{P}(U^{1/k} \leq x^{-1}) = \mathbb{P}(U^k \leq x^{-k}) = x^{-k}, \quad (4)$$

ce qui est bien la propriété caractéristique (6) de la loi $\mathcal{Pareto}_k$. $\square$

2.c Remarque. En pratique, on suit plutôt le chemin inverse : connaissant la fonction de répartition de la loi de Pareto, on en déduit comment la simuler à partir de U par la méthode d'inversion.^[*]

À partir, on peut ensuite par translation, dilatation et recollement construire de multiples lois “de type Pareto” dont on connaît explicitement la densité et qu'on peut simuler facilement. En pratique, on définit généralement ces lois par leur densité et on cherche ensuite comment les simuler.

2.d Exemple. Soit $\mathbb{P}$ la loi de densité

$$\frac{d\mathbb{P}}{dx} := \begin{cases} 4/(|x| + 2)^3 & \text{si } x \leq 0; \\ 1/[2(|x| + 1)^2] & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Pour simuler $\mathbb{P}$, nous pouvons commencer par la décomposer en $\frac{1}{2}\mathbb{P}_- + \frac{1}{2}\mathbb{P}_+$, où $\mathbb{P}_-$ est la loi de densité $\mathbf{1}_{x < 0} 8/(|x| + 2)^3$ et $\mathbb{P}_+$ est la loi de densité $\mathbf{1}_{x > 0} 1/(|x| + 1)^2$. Par la méthode d'inversion des fonctions de répartition, $\mathbb{P}_1$ est la loi de $2 - 2U^{-1/2}$ et $\mathbb{P}_2$ est la loi de $U^{-1} - 1$ (où il est sous-entendu que $U \sim \mathcal{Uniforme}(0, 1)$).^[†]

La loi de Pareto donne une famille de lois dont les queues sont d'épaisseur polynômiale à l'infini. On peut de même s'intéresser à construire des lois dont la densité explose de façon polynômiale en 0 :

2.e Définition. Pour $k \in (0, \infty)$, la *loi bêta de paramètres $(k, 1)$* ^[‡] est la loi sur $(0, 1)$ définie par

$$\mathbb{P}(X \leq x) = x^k. \quad (6)$$

[*]. Quand on applique la méthode d'inversion, cela suggère en fait de simuler X comme $(1 - U)^{-1/k}$. Mais comme $(1 - U)$ a la même loi que U , autant utiliser directement $U^{-1/k}$.

[†]. Même remarque que précédemment : quand on applique la méthode d'inversion à la loi $\mathbb{P}_+$, on tombe en fait sur $(1 - U)^{-1} - 1$, mais $U^{-1} - 1$ donne la même chose en plus simple.

[‡]. En fait, les lois bêta sont une famille de lois plus générale, avec deux paramètres ; ce qui nous décrivons ici correspond au cas où le second paramètre est égal à 1.

3.a Proposition.

- (i). La loi $\beta_{k,1}$ a la densité $\mathbf{1}_{0 < x < 1} kx^{k-1}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
- (ii). Si U est uniforme sur $(0, 1)$, alors U^k suit la loi $\beta_{k,1}$.

Démonstration. Il suffit de transposer les preuves pour la loi de Pareto données ci-dessus. $\square$