École des Mines de Nancy, année 2011–12

Méthodes probabilistes pour la simulation [SG241]
Examen de rattrapage (1^{er} groupe)

jeudi 3 mai 2012, 16 h 00

PROBLÈME 1 — Comment brille le Soleil ?

La question qui nous intéresse dans ce problème est de savoir combien de lumière la surface du Soleil émet en fonction de la direction. Pour ce faire, on considère une petite portion du Soleil proche de sa surface ; à cette échelle, on peut considérer que le Soleil occupe le demi-espace $\{z < 0\}$ *de notre espace euclidien tridimensionnel usuel* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$.

Un modèle [*] *pour l'émission de la lumière par le Soleil est le suivant :*

1. *Un photon* [†] *est créé loin de la surface du Soleil. Il part alors en ligne droite dans une direction aléatoire uniformément distribuée.*
2. *Au bout d'une distance aléatoire dont la loi est exponentielle, si le photon est encore à l'intérieur du Soleil, il est absorbé par le plasma dont le Soleil est constitué, puis réémis de l'endroit même où il a été absorbé, mais dans un nouvelle direction indépendante de sa direction incidente, laquelle est à nouveau uniformément distribuée. On répète cette étape jusqu'à ce qu'éventuellement le photon traverse la surface du Soleil.*
3. *Une fois que le photon est sorti du Soleil, il continue sa course en ligne droite dans le vide indéfiniment.*

Dans un premier temps, notre objectif est de simuler l'émission des photons par le Soleil. L'échelle des distances est supposée prise de sorte que la loi exponentielle qui intervient dans le modèle est de paramètre 1*. On supposera pour simplifier (car cela ne change guère les résultats) que tous les photons sont émis depuis le point* $(0, 0, -8)$.

1. Comment simuler une direction uniforme de l'espace, c'est-à-dire un point uniformément distribué sur la sphère unité ?
Indication : On pourra se rappeler qu'une certaine loi gaussienne est invariante par rotation...

2. Écrire une fonction MATLAB qui simule l'émission de N photons par le Soleil (on testera la fonction pour une dizaine de N tout au plus). Cette fonction prendra N en argument, dessinera un *plot* tridimensionnel de la trajectoire des N photons (on fera également apparaître sur le graphique la surface du Soleil, et on dessinera la longueur de trajectoire des photons une fois sortis du Soleil sur 32 unités de longueur), d'autre part les angles (exprimés en degrés) que font les photons par rapport à la surface au moment où ils émergent. Si, au bout de 3 000 simulations, un des photons simulés n'est toujours pas sorti du Soleil, on s'autorisera à laisser tomber la trajectoire de celui-ci et à tirer à la place un nouveau photon depuis le point de départ.
Indication : La fonction `plot3` permet de tracer des courbes tridimensionnelles linéaires par morceaux : vous obtiendrez l'aide en ligne sur cette fonction par la commande `doc plot3`.

[*]. Ce modèle est assez simpliste, mais qualitativement correct.
[†]. C'est-à-dire un « grain » de lumière

Indication : La commande `hold on` permet de tracer plusieurs *plots* sur la même figure.
Indication : En ce qui concerne le tracé de la surface du Soleil, recopiez simplement le code suivant :

```
Xsurface = (-32:2:32)'*ones(1,33);
Ysurface = ones(33,1)*(-32:2:32);
Zsurface = zeros(33);
mesh(Xsurface,Ysurface,Zsurface);
```

3. Écrire une fonction MATLAB qui utilise la méthode de Monte-Carlo pour évaluer la proportion de photons qui sortent avec un angle d'émergence compris entre 0° et 5° par rapport à la surface, entre 5° et 10°, ..., et entre 85° et 90°.

On imagine maintenant que trois physiciens tentent de calculer théoriquement les proportions que nous venons de simuler. À cause de diverses fautes de calcul, ils sont arrivés à trois conclusions différentes... Ainsi, selon le premier physicien, la probabilité qu'un rayon sorte du Soleil avec l'angle θ est proportionnelle à $\sin\theta\, d\theta$; selon la seconde, elle est proportionnelle à $\sin(2\theta)\, d\theta$; et selon la troisième, à $\sin\theta \sin(2\theta)\, d\theta$.

4. Au vu des simulations effectuées, qui a raison ?

5. Comment feriez-vous pour donner un sens quantifiable à la façon dont l'expérience numérique confirme ou infirme le calcul de tel ou tel physicien ? Développez.

PROBLÈME 2 — Comment voyons-nous la Lune ?

Dans ce problème, il s'agit de savoir comment nous voyons la Lune depuis la Terre, lorsqu'elle est dans son premier quartier. On imagine ainsi un photographe qui, depuis la Terre, tourne son appareil vers la Lune. La question est de savoir combien de photons seront reçus par les différents pixels du capteur de l'appareil.

Précisons quelques notations (voir aussi les dessins ci-après). On considère un repère $(Oxyz)$ centré au centre de la Lune, de rayon r. Le Soleil est situé à l'infini dans la direction $(y'y)$, c'est-à-dire que tous ses rayons arrivent selon la direction (yy'). La Terre (et donc le photographe) est située sur l'axe (Oy), à distance $L \gg r$ de l'origine. L'appareil du photographe est orienté vers la Lune ; autrement dit le capteur est parallèle au plan (Oyz). On repère un point M à la surface de la Lune par deux paramètres angulaires : θ, qui est l'angle entre (OM) et l'axe (Oz) (compris entre 0 et π), et φ, qui est l'angle entre (OM) et l'axe (Ox), vu en projection dans le plan (Oxy) *(compris entre $-\pi$ et π).*

On supposera que la Lune réémet la lumière du Soleil de la façon suivante : un élément de surface dS de la Lune situé au point M de coordonnées (θ, φ) émet, dans un élément de cône d'angle solide $d\Omega$ formant un angle α par rapport à la surface de la Lune en ce point (c'est-à-dire le plan tangent à la Lune en M), une intensité de rayonnement égale à

$$C \times \mathbf{1}_{|\varphi|<\pi/2} \cos\varphi \times \mathbf{1}_{\alpha>0} \sin\alpha\, d\Omega dS, \text{ [‡]} \tag{1}$$

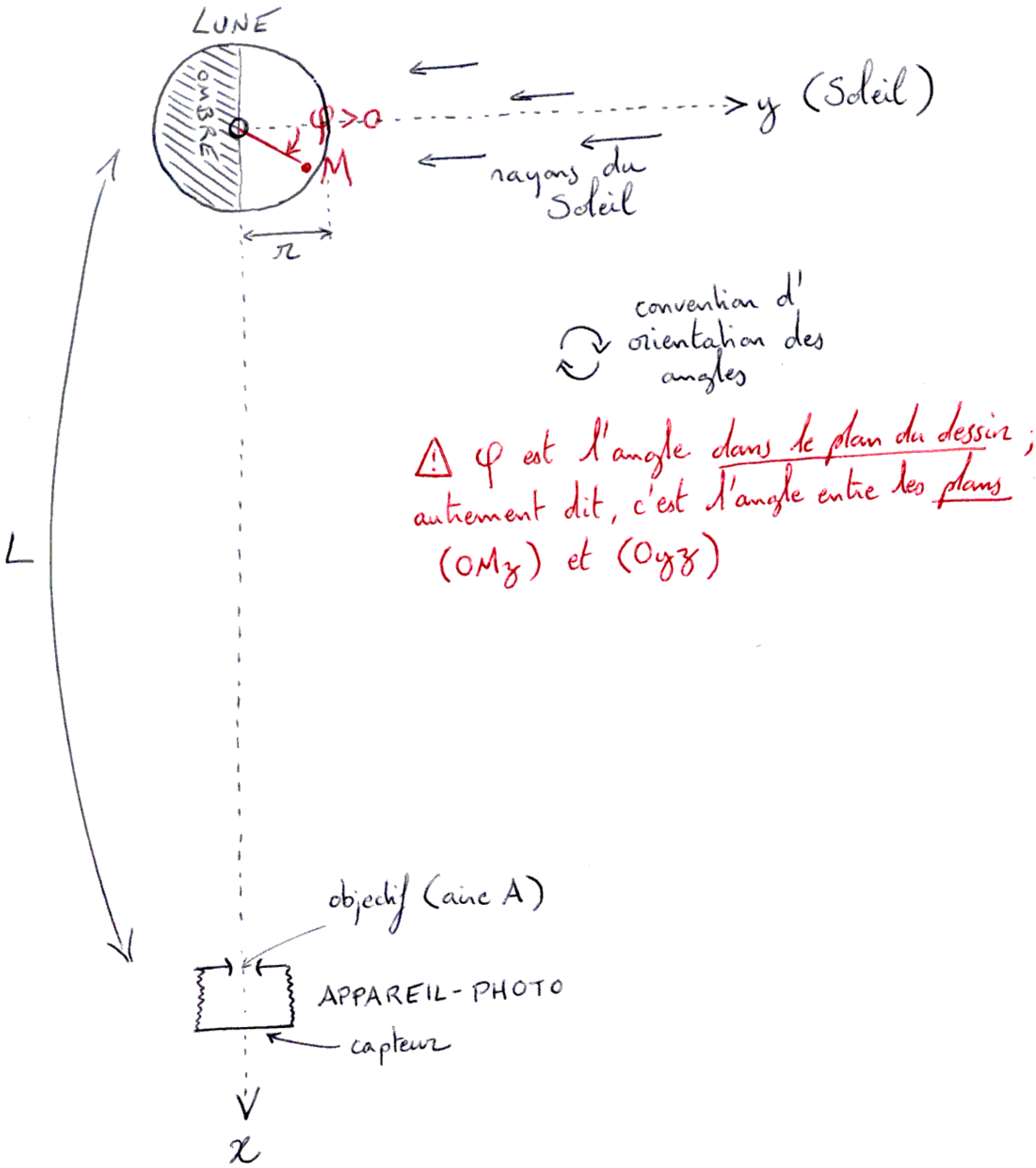
où C est une constante exprimant l'éclairement lumineux que la Lune reçoit du Soleil (et qui prend aussi en compte la blancheur de la surface lunaire).

Compte tenu de l'hypothèse $r \ll L$, lorsqu'un rayon de lumière émis depuis un point M de surface de la Lune traverse l'objectif de l'appareil, le point du capteur qu'il frappe

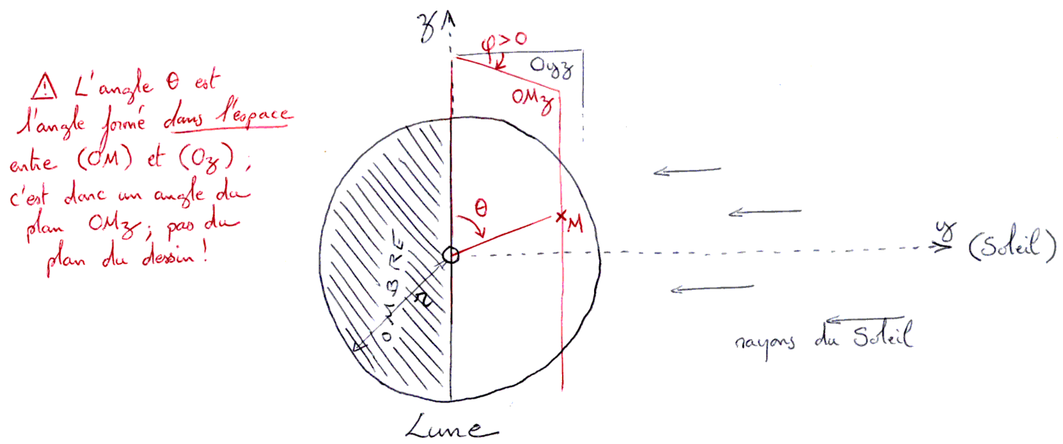
[‡]. C'est ce qu'on appelle le modèle de *réflexion lambertienne.*

VUE DE DESSUS

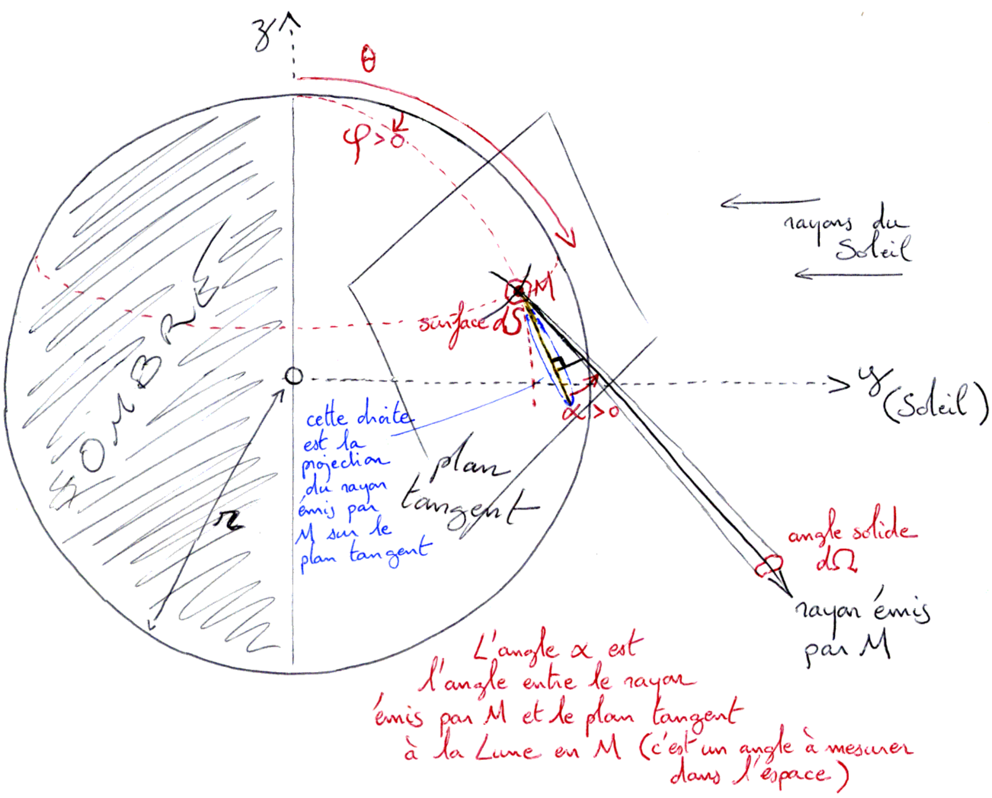
((Oz) pointe vers le haut)



VUE DE FACE (depuis la Terre)



ÉMISSION DE RAYONS LUMINEUX DEPUIS LA SURFACE DE LA LUNE (vue de la Terre)



est de coordonnées proportionnelles[§] *aux coordonnées y et z de M, i.e., aux unités de longueur près, ce rayon frappe le capteur au point* $(\sin\theta\cos\varphi, \cos\theta)$.

6. Soit A l'aire d'ouverture de l'objectif. Justifier que l'intensité de rayonnement émis par un élément de surface dS (situé au point M) de la Lune qui arrive jusqu'au capteur est égale à

$$CAD^{-2} \times \mathbf{1}_{\varphi\in(0,\pi/2)} \sin\theta \sin\varphi dS.$$

La méthode de Monte-Carlo « naïve » pour évaluer combien de photons frappent la le capteur consiste à simuler tous les photons émis depuis la surface de la Lune, puis à ne garder que ceux qui traversent l'objectif de l'appareil, en regardant quel point du capteur est atteint à chaque fois. Cela correspond à la procédure suivante :

1. *On tire un point M uniformément à la surface de la Lune.*
2. *L'intensité lumineuse totale par unité de surface émise depuis ce point étant égale à*
$$C \times \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \mathbf{1}_{|\varphi|\leqslant\pi/2} \cos\varphi \sin\alpha \times \cos\alpha \, d\alpha d\beta = C\mathbf{1}_{|\varphi|\leqslant\pi/2}\cos\varphi,$$
on décide que ce point émet un photon avec probabilité $\mathbf{1}_{|\varphi|\leqslant\pi/2}\cos\varphi$ et n'émet rien sinon.
3. *On choisit ensuite la direction du photon émis depuis M selon la loi physique* (1) *expliquée ci-dessus.*
4. *Si le photon traverse l'objectif, on ajoute un point d'impact sur le capteur de l'appareil au point de coordonnées* $(\sin\theta\cos\varphi, \cos\theta)$ *; sinon on ne fait rien.*
5. *On répète cela un nombre de fois égal à $C \times 4\pi r^2 \times t$ (arrondi à l'entier le plus proche — ou, pour être plus juste, il faudrait prendre une loi de Poisson ayant ce paramètre), t étant la durée d'ouverture.*

7. Expliquer mieux cette procédure.

8. Pourquoi la procédure naïve est-elle très mauvaise en pratique ?

On se propose d'améliorer notre simulation des photons frappant le capteur (plus précisément de leur nombre moyen) aux différents point par la technique échantillonnage préférentiel. La loi d'échantillonnage préférentiel est la suivante :

1. *On tire un point uniformément à la surface de la Lune.*
2. *Si $\varphi \notin (0,\pi/2)$, le photon émis par ce point ne traverse pas l'objectif. Si $\varphi \in (0,\pi/2)$, on tire au contraire un photon qui traverse l'objectif.*

9. Quelle est la densité de cette loi d'échantillonnage par rapport à la densité naïve ? (cette densité dépendant de θ et φ).

10. Implémenter la méthode de Monte-Carlo avec échantillonnage préférentiel pour évaluer le nombre moyen de photons qui arrivent sur les différents pixels d'un capteur de taille 10×10 cadrant la Lune (le rayon de celle-ci correspondant donc à 5 pixels sur ce capteur). Commenter le résultat obtenu.

[§]. Négativement proportionnelles, à vrai dire, puisque l'image sur le capteur est retournée... Nous omettrons ce détail ici.