

École des Mines de Nancy, année 2011–12
Méthodes probabilistes pour la simulation [SG241]
Examen de rattrapage (2^d groupe)

jeudi 31 mai 2012, 13 h 30

PROBLÈME 1 — Le génie de la finance

☛ Dans tout ce problème, on suppose pour simplifier que le taux de placement sans risque est nul.

Dans ce problème, on considère un actif financier $(A_t)_{t \geq 0}$ dont l'évolution du cours est modélisée comme la somme de deux actifs (virtuels) $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$ (càd. qu'on a $A_t = B_t^{(1)} + B_t^{(2)}$); tels que $(\ln B_t^{(1)}, \ln B_t^{(2)})_{t \geq 0}$ suit un mouvement brownien bidimensionnel (non standard) avec la dérive (μ_1, μ_2) , de covariance par unité de temps égale à

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2 \\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

1. Comment comprenez-vous ce modèle? Interprétez aussi le sens des différents paramètres qui interviennent, en précisant leurs homogénéités physiques et les ordres de grandeur qui vous paraîtraient plausibles.

2. Écrire une fonction MATLAB qui simule et trace l'évolution du cours de l'actif A sur l'intervalle de temps $[0, T]$. Cette fonction prendra comme arguments les différents paramètres du modèle, les valeurs initiales $B_0^{(1)}$ et $B_0^{(2)}$, et le temps T , plus un paramètre de discrétisation.

On considère maintenant la situation suivante : une entreprise a besoin d'acheter 50 000 titres de l'actif A d'ici le temps T , qu'elle souhaite évidemment acquérir au meilleur prix possible. Or voici qu'arrive un « génie de la finance », qui affirme à l'entreprise qu'il possède une méthode infailible pour savoir à quel moment le cours de l'actif sera le plus bas sur tout l'intervalle $[0, T]$. Le génie refuse de révéler sa méthode, mais prend l'engagement suivant : au temps T , il fournira à l'entreprise 50 000 titres de l'actif pour le prix le plus bas que le cours de l'actif aura atteint pendant toute la période. Cependant, en échange de ce service, le génie réclame 700 000 € d'honoraires... L'entreprise se demande donc si le service rendu vaut ce prix!

3. Dans un premier temps, on imagine que l'entreprise choisit de ne pas recourir aux services du génie. Justifier alors que, si $\mu_1 + \sigma_1^2/2 \geq 0$ et $\mu_2 + \sigma_2^2/2 \geq 0$, la stratégie optimale que doit suivre l'entreprise (au sens où la moyenne du gain apporté par cette stratégie sera optimale) est simplement d'acheter tout de suite les titres dont elle a besoin. (On ne demande pas une rigueur absolue dans la réponse; une simple explication formelle suffira).

Indication : La question a un lien avec votre cours sur les martingales...

4. En déduire quelle est la valeur *a posteriori* du service rendu par le génie une fois qu'on connaît toute la trajectoire du cours de l'actif $(A_t)_{0 \leq t \leq T}$.

5. En évaluant l'espérance de la quantité précédente par la méthode de Monte-Carlo, conclure quant à la pertinence du prix demandé par le génie. On prendra les valeurs numériques suivantes : $\mu_1 = \mu_2 = -2 \text{ \%.an}^{-1}$; $\sigma_1 = 0,6 \text{ an}^{-1/2}$; $\sigma_2 = 0,3 \text{ an}^{-1/2}$; $r = 0,5$; $B_0^{(1)} = 20 \text{ €}$; $B_0^{(2)} = 30 \text{ €}$; $T = 2 \text{ an}$.

PROBLÈME 2 — Le yahtzee, « suite »

Question. Reprendre le problème du *yahtzee* du polycopié, sauf que cette fois-ci l'objectif ne sera pas d'obtenir un « yahtzee » mais une « grande suite au '5' », cād. la combinaison « '1', '2', '3', '4', '5' ». On suivra le plan ci-dessous :

1. Décrire la stratégie optimale à suivre par le joueur ;
2. Évaluer la probabilité de succès par la méthode de Monte-Carlo « naïve » ;
3. Proposer une technique de conditionnement pour améliorer l'efficacité de cette méthode ;
4. Réfléchir à une technique d'échantillonnage préférentiel.