

Exercice 1 On considère la suite $(F_n)_{n \geq 0}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

I. En cherchant F_n sous la forme $\alpha r^n + \beta q^n$, donner une expression analytique pour F_n .

II. Dédurre de la question I la limite de F_{n+1}/F_n quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 2 On considère à nouveau la suite de l'exercice 1.

I. Montrer que la suite est asymptotiquement périodique ^(2a) dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

II. Montrer qu'on peut prolonger la suite aux indices négatifs. En déduire que la suite est en fait périodique ^(2b) dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

III. Dédurre de la question II que pour deux entiers $p, q \in \mathbb{N}^*$,

$$F_p | F_q \Leftrightarrow p | q.$$

Exercice 3 Montrer que si X est une variable aléatoire réelle positive ^(3a), on a :

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}[X \geq x] dx.$$

(2a). C'est-à-dire qu'il existe une période $p \in \mathbb{N}^*$ et un rang n_0 tels que $u_{n+p} = u_n$ pour tout $n \geq n_0$.

(2b). Même définition que pour « asymptotiquement périodique », mais avec $n_0 = 0$.

(3a). En fait, une variante de cet exercice fonctionne sans l'hypothèse de positivité