

Devoir à la maison

20 avril 2009

Exercice 1 (Convergence en loi et fonctions de répartition)

Soit X_n une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilisé $(\Omega, A, \mathbb{P})$, indépendantes, de même loi, de fonction de répartition F . On définit les variables aléatoires I_n et M_n par

$$I_n = \min_{1 \leq i \leq n} X_i \text{ et } M_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

1. On pose $x_i = \inf(x|F(x) > 0)$. Montrer, en utilisant la convergence des fonctions de répartition de I_n , que si $x_i > -\infty$, alors I_n converge vers x_i en loi. Que se passe-t-il si $x_i = -\infty$?

2. On pose $x_s = \inf(x|F(x) = 1)$. Montrer, en utilisant la convergence des fonctions de répartition de M_n , que si $x_s < +\infty$, alors M_n converge vers x_s en loi. Que se passe-t-il si $x_s = +\infty$?

3. On suppose que les X_n sont de même loi exponentielle $\exp(\lambda)$ où $\lambda > 0$. On pose $Z_n = \frac{M_n}{\ln(n)}$. Montrer que la fonction de répartition de Z_n est nulle si $x \leq 0$ et vaut, si $x > 0$:

$$F_{Z_n}(x) = (1 - e^{-\lambda x \ln(n)})^n.$$

4. Montrer que Z_n converge en loi vers $\frac{1}{\lambda}$.

Exercice 2 (Contre-exemples sur les lois gaussiennes)

1. Soit X une variable aléatoire $\mathcal{N}(0, 1)$ et soit Z indépendante de X telle que $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = -1) = 1/2$. Soit $Y = ZX$. Montrer que Y est de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, que X et Y sont décorrélées (càd. que leur covariance est nulle), mais que (X, Y) n'est pas gaussien.

2. Montrer qu'il existe X_1, X_2 des variables aléatoires complexes non corrélées (ce qui signifiera ici que leur covariance *complexe* est nulle) telles que la variable aléatoire (X_1, X_2) (vue cette fois-ci comme un quadruplet *réel*) soit gaussienne mais que X_1 et X_2 ne soient pas indépendantes.

Exercice 3 (Manipulation de la fonction caractéristique / exercice technique dont on utilisera le résultat)

Soit X une variable aléatoire L^2 centrée de variance σ^2 . On note φ sa fonction caractéristique.

1. Montrer que pour tout réel t , on a

$$\varphi(t) = 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2} - t^2 \int_0^1 (1-u) \mathbb{E}(X^2(e^{ituX} - 1)) du.$$

2. Montrer que pour tout réel t tel que $3t^2\sigma^2 \leq 1$, la fonction $\log(\varphi(t))$ existe et admet la représentation

$$\log(\varphi(t)) = -\frac{t^2\sigma^2}{2} - t^2 \int_0^1 (1-u) \mathbb{E}(X^2(e^{ituX} - 1)) du + 3\theta(t)t^4\sigma^4,$$

où $\theta(t)$ est un complexe de module plus petit ou égal à 1.

Exercice 4 (Théorème de Linderberg / Lyapounov)

Soit X_k une suite de variables aléatoires L^2 centrées et indépendantes. On note μ_k la loi de X_k et on note σ_k^2 la variance de X_k . On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $C_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$. On pose $Z_n = \frac{S_n}{C_n}$. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\frac{1}{C_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x| \geq \varepsilon C_n} x^2 d\mu_k(x) \rightarrow 0$$

quand n tend vers l'infini. (condition de Linderberg)

1. Montrer que $\frac{1}{C_n^2} \sup_{1 \leq k \leq n} \sigma_k^2 \rightarrow 0$ lorsque n tend vers l'infini.

2. Montrer en utilisant l'exercice 3 que pour tout réel t , on peut trouver n assez grand tel que $\log(\varphi_{Z_n}(t)) = -\frac{t^2}{2} - t^2 A_n + 3t^4 B_n$.

3. Montrer que A_n et B_n tendent vers 0 quand n tend vers l'infini (pour A_n , on pourra découper l'intégrale en deux : $|x| < \varepsilon C_n$ et $|x| \geq \varepsilon C_n$ et trouver des majorations de la fonction intégrée). En déduire que Z_n converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. (Théorème de Linderberg)

4. On suppose maintenant que les X_k sont dans $L^{2+\delta}$ pour $\delta > 0$, centrées indépendantes. On garde les mêmes notations et on suppose cette fois que

$$\frac{1}{(C_n)^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|X_k|^{2+\delta}) \rightarrow 0$$

quand n tend vers l'infini. Déduire du théorème de Linderberg que Z_n converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. (Théorème de Lyapounov)