

Corrigé du devoir à la maison

I.2. On va commencer par répondre à la question 2, qui est un peu plus simple. Notons F la fonction de répartition commune des X_n et F^n la fonction de répartition des I_n . Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F^n(x) &= \mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} X_i \leq x\right) \\ &= \mathbb{P}(\forall i \in \{1, \dots, n\} X_i \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n \leq x) = F(x)^n, \end{aligned}$$

où l'avant-dernière égalité découle de l'indépendance des X_i . Donc $F^n(x)$ converge simplement, quand $n \rightarrow \infty$, vers 1 si $x > x_s$, resp. 0 si $x < x_s^{(*)}$. Or la fonction de répartition de la v.a. constante égale à x_s est $F^\infty(x) = \mathbb{1}_{x \geq x_s}$, et F^n converge donc simplement vers F^∞ en tout point de continuité de cette dernière, ce qui est équivalent à dire que M_n converge en loi vers x_s . Si x_s est infini, $F^n(x)$ tend vers 0 pour tout x quand n tend vers l'infini, et comme la suite M_n est croissante on en déduit que $M_n \nearrow \infty$ p.s. (en disant que pour tout $A \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}[M^n \leq A] \rightarrow 0$, et donc $\mathbb{P}[\sup M^n \leq A] = 0$).

I.1. On peut renverser l'axe réel et appliquer la question 2, ou refaire le raisonnement précédent en montrant similairement que la fonction de répartition F_n de I_n vérifie :

$$F_n(x) = 1 - [1 - F(x)]^n.$$

I.3. D'après la question 2 et l'expression de la fonction de répartition de la loi exponentielle, on sait que la fonction de répartition de M_n est

$$F^n(x) = \mathbb{1}_{x \geq 0} (1 - e^{-\lambda x})^n.$$

On peut alors en déduire la fonction de répartition de Z_n :

$$F_{Z_n}(x) = \mathbb{P}(Z_n \leq x) = \mathbb{P}(M^n / \ln(n) \geq x) = \mathbb{P}(M^n \geq \ln(n)x) = F^n(\ln(n)x).$$

I.4. Essayons de calculer la limite simple de $F_{Z_n}(x)$ quand n tend vers l'infini : on voit que, pour $x > 0$,

$$\ln F_{Z_n}(x) = n \ln(1 - e^{-\lambda x \ln(n)}) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -n e^{-\lambda x \ln(n)} = -n^{1-\lambda x},$$

qui tend vers $-\infty$ pour $x < 1/\lambda$, resp. vers 0 pour $x > 1/\lambda$. Par conséquent, $F_{Z_n}(x)$ tend vers 0 pour $x < 1/\lambda$, resp. vers 1 pour $x > 1/\lambda$, ce qui comme dans la question 2 montre que Z_n converge en loi vers $1/\lambda$.

^(*) En fait, par continuité à droite de F on sait que $F(x_s) = 1$, mais on n'en a pas besoin ici.

II.1. Montrons que Y est gaussien. Si μ note la mesure de X , la mesure de Y est, en décomposant suivant la valeur de Z , $(\mu + (-\text{Id})\#\mu)/2$. Or μ est symétrique, ce qui signifie que $(-\text{Id})\#\mu = \mu$, donc la loi de Z est μ .

Montrons que X et Y sont décorrélées. X est centrée, donc la covariance de X et Y est simplement $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^2Z]$, qui par indépendance vaut $\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X^2] \times 0 = 0$.

Montrons que (X, Y) n'est pas gaussien : si (X, Y) était gaussien, comme X et Y sont de covariance nulle X et Y seraient indépendantes, ce qui est clairement faux puisque, par exemple, X et Y sont la même valeur absolue (non constante).

II.2. On va chercher X et Y centrées, et déterminer une matrice de covariance pour $(\Re X, \Im X, \Re Y, \Im Y)$ qui satisfasse la condition. Si on note γ_{ij} les coefficients de la matrice de covariance, la condition de non-corrélation complexe signifie que $\gamma_{13} - \gamma_{24} = 0$ et $\gamma_{14} + \gamma_{23} = 0$, et la condition de non-indépendance signifie que l'un au moins de $\gamma_{13}, \gamma_{14}, \gamma_{23}, \gamma_{24}$ est non nul. Une matrice possible pour la covariance est par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et cela correspond bien à une matrice de covariance puisque c'est une matrice symétrique et positive – on peut aussi dire que c'est la matrice qui correspond à prendre $(\Re X, \Im X) = \mathcal{N}(0, I_2)$ et $Y = X$.

III.1. En fait, c'est une formule de Taylor avec reste intégral qu'on a un peu bidouillée. On a $\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$, donc en dérivant successivement, la formule d'interversion de somme et dérivée (qu'on est en mesure d'appliquer ici) nous donne successivement $\varphi'(t) = i\mathbb{E}[Xe^{itX}]$ et $\varphi''(t) = -\mathbb{E}[X^2e^{itX}]$, d'où

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + t^2 \int_0^1 (1-u)\varphi''(ut)du,$$

avec $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$. Dans la formule de l'énoncé, on a en outre artificiellement découpé $\varphi''(ut) = -\mathbb{E}[X^2e^{iutX}]$ en $-\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X^2(e^{iutX} - 1)]$, sachant que $\mathbb{E}[X^2] = \sigma^2$.

III.2. En majorant en module $\mathbb{E}[X^2(e^{ituX} - 1)]$ par $\mathbb{E}[2|X|^2] = 2\sigma^2$, on voit que $\varphi(t) = 1 + R(t)$ avec $|R(t)| \leq 3t^2\sigma^2/2$, ce qui est plus petit que $1/2$ sous la condition de l'énoncé. Or sur la boule complexe centrée sur 1 et de rayon $1/2$, il n'y a qu'un seul prolongement analytique du logarithme népérien, dont on montre (par exemple par un coup de formule de Taylor avec reste intégral) qu'il vérifie :

$$|\ln(1 + R(t)) - R(t)| \leq (4\ln 2 - 2)R(t)^2.$$

Cela donne donc le résultat demandé, où on trouve que $\theta(t)$ a un module plus petit que $3(\ln 2 - 1/2) = 0,57\dots < 1$.

IV.1. On a $\int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu_k(x) = \sigma_k^2$ et $\int_{|x| < \varepsilon C_n} x^2 d\mu_k(x) \leq (\varepsilon C_n)^2$, d'où

$$\int_{|x| \geq \varepsilon C_n} x^2 d\mu_k(x) \geq \sigma_k^2 - \varepsilon^2 C_n^2.$$

Notons D_n le membre de gauche de la condition de Linderberg. Pour tout $k \leq n$, on a :

$$D_n = \frac{1}{C_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x| \geq \varepsilon C_n} x^2 d\mu_k(x) \geq \frac{1}{C_n^2} \int_{|x| \geq \varepsilon C_n} x^2 d\mu_k(x) \geq \frac{\sigma_k^2}{C_n^2} - \varepsilon^2,$$

donc

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sup_{1 \leq k \leq n} \sigma_k^2}{C_n^2} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (D_n + \varepsilon^2) = \varepsilon^2,$$

d'où le résultat en faisant tendre ε vers 0.

IV.2. Si n est suffisamment grand, on a toujours $C_n^{-2} \sup_{1 \leq k \leq n} \sigma_k^2 \leq 1/(3t^2)$ d'après la question 1, de sorte que pour tout $k \leq n$, la variance de $Z_n^k = X_k/S_n$ est plus petite que $1/(3t^2)$, et donc d'après l'exercice 3 on peut définir un logarithme de $\varphi(Z_n^k)$ qui est de la forme $\sigma_k^2 t^2 / (2C_n^2) + A_n^k t^2 + B_n^k t^4$. Or Z_n est la somme indépendante des Z_n^k , donc $\varphi_{Z_n}(t)$ est le produit des $\varphi_{Z_n^k}(t)$, de sorte qu'on peut définir le logarithme de $\varphi_{Z_n}(t)$ comme la somme des $\ln \varphi_{Z_n^k}(t)$, qui sera bien de la forme souhaitée : en effet, $C_n^2 = \sum_{1 \leq k \leq n} \sigma_k^2$ d'après la formule sur les variances des sommes de v.a. indépendantes.

IV.3. Commençons par nous occuper de B_n . On a, avec des notations évidentes :

$$B_n(t) = \sum_{k=1}^n \theta_k(t) \frac{\sigma_k^4}{C_n^4},$$

d'où

$$|B_n(t)| \leq \frac{\sup_{1 \leq k \leq n} \sigma_k^2}{C_n^2} \times \underbrace{\frac{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}{C_n^2}}_{=1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Passons maintenant à l'étude de A_n , qui s'écrit :

$$A_n(t) = \frac{1}{C_n^2} \sum_{k=1}^n \int_0^1 (1-u) \mathbb{E}[X_k^2 (e^{iutX_k/C_n} - 1)] du.$$

Fixons-nous un petit $\varepsilon > 0$ et, conformément à la suggestion de l'énoncé, découpons :

$$\mathbb{E}[X_k^2 (e^{iutX_k/C_n} - 1)] = \int_{|x| < \varepsilon C_n} x^2 (e^{iutx/C_n} - 1) d\mu_k(x) + \int_{|x| \geq \varepsilon C_n} (\text{même chose}),$$

ce qui nous amène à écrire $A_n(t)$ à son tour comme une somme de deux termes. Le module du second terme est facilement majoré par

$$2 \sum_{k=1}^n \int_0^1 \int_{|x| \geq \varepsilon C_n} x^2 d\mu_k(x) du,$$

qui tend vers 0 à cause de la condition de Linderberg. Le premier terme de $A_n(t)$ est quant à lui borné en module par :

$$\frac{1}{C_n^2} \sum_{k=1}^n \int_0^1 (1-u) \int_{\mathbb{R}} x^2 u t \varepsilon d\mu_k(x) du,$$

puisque pour $\theta \in \mathbb{R}$ on a $|e^{i\theta} - 1| \leq \theta$ et qu'on a fait l'intégration sous la condition que $|x/C_n| < \varepsilon$. Cette expression est facilement majorée par $\varepsilon t \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 / C_n^2 = \varepsilon t$, et finalement on a récupéré que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_n(t)| \leq \varepsilon t,$$

et ce pour tout ε , donc $A_n(t) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Ainsi nous voyons que $\ln \varphi_{Z_n}(t)$ converge simplement vers $-t^2/2$ quand $n \rightarrow \infty$, et donc, en passant à l'exponentielle, que $\varphi_{Z_n}(t)$ converge simplement vers $e^{-t^2/2}$, qui est la fonction caractéristique de $\mathcal{N}(0, 1)$. D'après le théorème de Lévy, Z_n converge donc en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$ quand n tend vers l'infini.

IV.4. Tout ce que nous avons à faire est vérifier la condition de Linderberg. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut fabriquer une "inégalité de Markov" en écrivant :

$$\int_{|x| \geq \varepsilon C_n} x^2 d\mu_k(x) = \int_{|x| \geq \varepsilon C_n} |x|^{2+\delta} |x|^{-\delta} d\mu_k(x) \leq (\varepsilon C_n)^{-\delta} \mathbb{E}[|X_k|^{2+\delta}].$$

On en déduit que

$$\frac{1}{C_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x| \geq \varepsilon C_n} x^2 d\mu_k(x) \leq \varepsilon^{-\delta} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|X_k|^{2+\delta}]}{C_n^{2+\delta}} \rightarrow 0$$

d'après la condition de Lyapounov, ce qui nous permet d'appliquer le théorème de Linderberg.