

Sur la construction et la magie des carrés apolliniens

Mai-Linh TRÂN CÔNG

24 juin 2021

Résumé

On étudie dans ce rapport une nouvelle méthode de construction de carrés magiques d'ordre $4k + 2$ ($k > 0$) découverte par deux amis amateurs de nombres¹.

Nous commencerons par expliquer et formaliser l'algorithme de construction, puis nous démontrerons rigoureusement la magie des carrés ainsi obtenus, qui jusqu'ici n'avait été qu'observée empiriquement.

Algorithme de construction

L'algorithme de construction est tiré d'un programme Python fourni par M. COQUARD, l'un des deux amis mentionné ci-dessus. Ce programme a fait l'objet d'un travail complet de réécriture afin d'en faciliter sa compréhension. À titre de comparaison, le programme original ainsi que sa réécriture sont consultables sur GitHub².

Principe de la construction

Définitions

Un *carré magique* d'ordre n est un carré de $n \times n$ cases rempli d'entiers naturels de sorte que la somme des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque grande diagonale soit égale. Il est dit *normal* lorsque les entiers naturels qui le remplissent sont exactement les entiers de 1 à n^2 .

On considère ici des carrés où

$$n = 4k + 2 = 2m$$

avec $m = 2k + 1$ et k un entier naturel non nul.

On travaille avec deux carrés :

-
1. Voir note de M. PEYRE annexée en fin de document pour plus de détails.
 2. <https://github.com/Nhali/carres-apolliniens>

- Le premier, non magique, est rempli de gauche à droite et de haut en bas avec les entiers allant de 1 à n^2 . On l'appelle le *carré de départ*.
- Le second est obtenu en appliquant certaines transformations (détaillées ci-dessous) au carré de départ. On l'appelle le *carré d'arrivée*. C'est ce carré qui nous intéresse, et dont on montrera plus tard la magie.

Chaque carré est divisé en 4 sous-carrés de dimension $n/2$. On appelle ces sous-carrés des *quadrants*. On les repère par la suite grâce aux quatre points cardinaux (voir partie gauche de la figure 1). Dans le code Python, pour des raisons pratiques, on les repère plutôt par des numéros (voir partie droite de la figure 1).

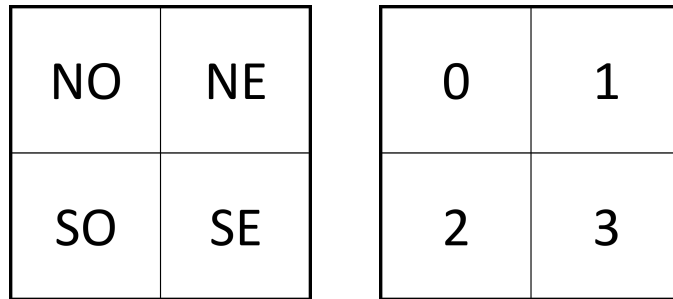


FIGURE 1 – Gauche : Appellations des quadrants utilisées dans ce document. Droite : Numérotation des quadrants utilisée dans le code Python

Notations

- On appelle :
- $Q_{\text{Dép}}$ le carré de départ
 - Q_{Arr} le carré d'arrivée

Description de l'algorithme

L'algorithme de construction de Q_{Arr} est purement géométrique et se base sur le déplacement des cases de $Q_{\text{Dép}}$. Les seules cases qui restent « fixes » sont les *grandes diagonales* de $Q_{\text{Dép}}$ (i.e. la diagonale principale et l'antidiagonale).

On vient découper chaque quadrant de $Q_{\text{Dép}}$ en *blocs diagonaux*. Un *bloc* est un ensemble de cases. Dans notre construction, chaque bloc est un regroupement de diagonales d'un même quadrant, d'où la dénomination de *bloc diagonal*.

La figure 2 présente le découpage de $Q_{\text{Dép}}$ en blocs (chaque couleur représente un bloc différent). La croix blanche centrale figure les grandes diagonales du carré. Sur le tour du carré sont indiqués les nombres de diagonales contenues dans chaque bloc.

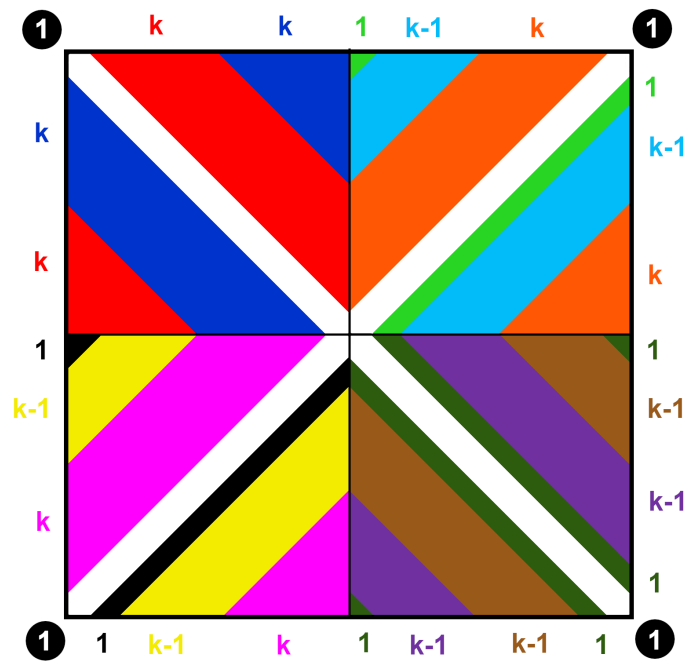


FIGURE 2 – Découpage de $Q_{\text{D}\acute{e}\text{p}}$ en bloc

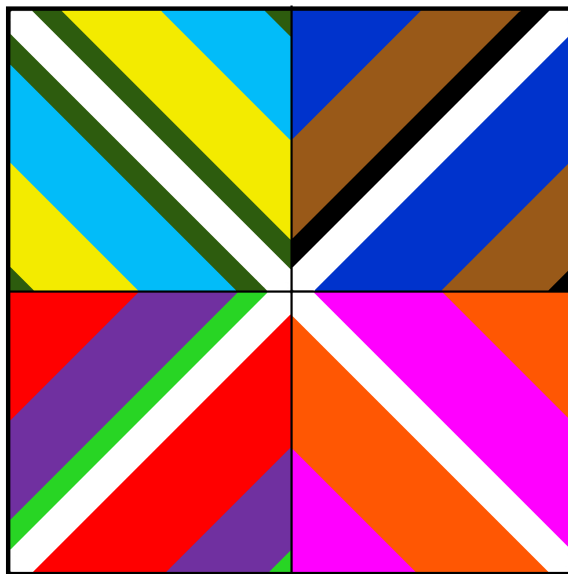


FIGURE 3 – Carré $Q_{\text{A}\text{r}\text{r}}$ obtenu après réassemblage des blocs

On vient ensuite réarranger les blocs en leur appliquant les transformations suivantes :

- Blocs **bleu**, **azur**, **rose** et **violet** : symétrie par rapport à l'axe vertical central du carré.
- Blocs **rouge**, **orange**, **jaune** et **brun** : symétrie par rapport à l'axe horizontal central du carré.
- Blocs **pistache**, **noir** et **vert** : symétrie centrale par rapport au centre du carré.

On obtient alors le carré Q_{Arr} recherché (figure 3).

Construction formelle

Definitions

Une *case* désigne une *position* au sein du carré. On notera \mathbb{A} l'ensemble des cases d'un carré d'ordre n .

La *valeur* d'une case est le nombre qu'on fait figurer à cette position.

Notations

Il est important de noter qu'on commence la numérotation des lignes et des colonnes à 0. Ainsi, la dernière colonne de $Q_{\text{Dép}}$ est la colonne $n - 1$.

Les notations ont été choisies dans un souci de cohérence censé les rendre transparentes : les fonctions sont en **gras** et les variables en *italique* ; et la lettre par laquelle fonctions et variables sont désignées correspond à la nature de l'objet qu'elles désignent (ou que désigne la valeur de sortie, dans le cas d'une fonction) : 'v' pour une valeur, 'a' pour une case, 'i' (resp. 'j') pour une ligne (resp. une colonne) par rapport au carré dans son ensemble, 'l' (resp. 'c') pour une ligne (resp. une colonne) par rapport à un quadrant, 'b' pour un bloc.

Pour Q un carré quelconque et a une case, on note :

- $v_Q(i, j)$ la valeur de la case qui se trouve à l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne de Q ;
- $i(a)$, resp. $j(a)$, la ligne (resp. la colonne) sur laquelle se trouve a ;
- Réciproquement, pour i un numéro de ligne et j un numéro de colonne, on a $a(i, j)$ la case qui se trouve à l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne :
- $v_Q(a) := v_Q(i(a), j(a))$ la valeur contenue par la case a pour le carré Q ³.

Dans le cas particulier des carrés $Q_{\text{Dép}}$ et Q_{Arr} , on abrège $v_{Q_{\text{Dép}}}$ et $v_{Q_{\text{Arr}}}$ en $v_{\text{Dép}}$ et v_{Arr} respectivement.

3. Ainsi, la fonction v_Q peut s'appliquer soit à un couple (*ligne, colonne*), soit à une *case* : en pratique, le contexte permet toujours de savoir dans quel cas on est, de sorte qu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Le système de coordonnées (i, j) se rapporte à l'ensemble du carré. Comme le découpage de $Q_{\text{Dép}}$ en blocs est inhérent à chaque quadrant, on utilise également un système de coordonnées *locales* qui se rapporte au quadrant dans lequel se trouve a . On pose ainsi :

$$\begin{cases} \mathbf{l}(a) = \mathbf{i}(a) \bmod m \\ \mathbf{c}(a) = \mathbf{j}(a) \bmod m. \end{cases}$$

Remplissage de $Q_{\text{Dép}}$

On pose pour toute $a \in \mathbb{A}$:

$$\mathbf{v}_{\text{Dép}}(a) = n \cdot \mathbf{i}(a) + \mathbf{j}(a) + 1.$$

Cela correspond au remplissage de gauche à droite et de haut en bas avec les entiers naturels allant de 1 à n^2 .

Critères d'appartenance à un quadrant

On pose :

$$\begin{cases} NO = \{a \in \mathbb{A} \mid \mathbf{i}(a) < m \text{ et } \mathbf{j}(a) < m\} \\ NE = \{a \in \mathbb{A} \mid \mathbf{i}(a) < m \text{ et } \mathbf{j}(a) \geq m\} \\ SO = \{a \in \mathbb{A} \mid \mathbf{i}(a) \geq m \text{ et } \mathbf{j}(a) < m\} \\ SE = \{a \in \mathbb{A} \mid \mathbf{i}(a) \geq m \text{ et } \mathbf{j}(a) \geq m\}. \end{cases}$$

Critères d'appartenance à un bloc

Rappelons qu'un *bloc* est un ensemble de cases. On introduit donc $\mathbb{B} = \mathcal{P}(\mathbb{A})$ l'ensemble des blocs d'un carré d'ordre n .

Remarquons d'abord sur la figure 2 que le découpage en blocs des quadrants NO et SE de $Q_{\text{Dép}}$ se base sur les diagonales qui ont la même direction que la *diagonale principale*, alors que le découpage des quadrants NE et SO de $Q_{\text{Dép}}$ se base sur les diagonales qui ont la même direction que l'*antidiagonale*.

On observe également que tous les blocs sont composés de deux « morceaux » (à part le bloc *vert*, mais on peut le considérer comme deux blocs en deux morceaux). Ces morceaux semblent communiquer comme si chaque quadrant était un tore : lorsque qu'un bloc « sort » par un côté, il « rentre » du côté opposé ; de même pour le haut et le bas du quadrant.

Traduit en termes d'indices, cela signifie que si a est dans le quadrant NO ou SE , $\mathbf{b}_{\text{Dép}}(a)$ est déterminé par la valeur de $\mathbf{c}(a) - \mathbf{l}(a) \pmod{m}$, et si a est dans le quadrant NE ou SO , $\mathbf{b}_{\text{Dép}}(a)$ est déterminé par la valeur de $\mathbf{c}(a) + \mathbf{l}(a) \pmod{m}$.

On identifiera les blocs utiles à notre construction par leur *couleur* et on introduit donc $\mathbb{B}_{\text{Dép}} = \{\text{bleu}, \text{azur}, \text{rose}, \text{violet}, \text{rouge}, \text{orange}, \text{jaune}, \text{brun}, \text{pistache}, \text{noir}, \text{vert}, \text{blanc}\} \subset \mathbb{B}$ défini par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{blanc} & = \{a \in \mathbb{A} \mid \mathbf{i}(a) - \mathbf{j}(a) = 0 \text{ ou } \mathbf{i}(a) + \mathbf{j}(a) = n - 1\} \\ \text{bleu} & = \{a \in NO \mid \mathbf{c}(a) - \mathbf{l}(a) \equiv x \pmod{m}, \quad x \in \llbracket 1, k \rrbracket\} \\ \text{rouge} & = \{a \in NO \mid \mathbf{c}(a) - \mathbf{l}(a) \equiv x \pmod{m}, \quad x \in \llbracket k + 1, 2k \rrbracket\} \\ \text{pistache} & = \{a \in NE \mid \mathbf{c}(a) + \mathbf{l}(a) \equiv 0 \pmod{m}\} \\ \text{azur} & = \{a \in NE \mid \mathbf{c}(a) + \mathbf{l}(a) \equiv x \pmod{m}, \quad x \in \llbracket 1, k - 1 \rrbracket\} \\ \text{orange} & = \{a \in NE \mid \mathbf{c}(a) + \mathbf{l}(a) \equiv x \pmod{m}, \quad x \in \llbracket k, 2k - 1 \rrbracket\} \\ \text{noir} & = \{a \in SO \mid \mathbf{c}(a) + \mathbf{l}(a) \equiv 0 \pmod{m}\} \\ \text{jaune} & = \{a \in SO \mid \mathbf{c}(a) + \mathbf{l}(a) \equiv x \pmod{m}, \quad x \in \llbracket 1, k - 1 \rrbracket\} \\ \text{rose} & = \{a \in SO \mid \mathbf{c}(a) + \mathbf{l}(a) \equiv x \pmod{m}, \quad x \in \llbracket k, 2k - 1 \rrbracket\} \\ \text{vert} & = \{a \in SE \mid \mathbf{c}(a) - \mathbf{l}(a) \equiv x \pmod{m}, \quad x \in \{1, 2k\}\} \\ \text{violet} & = \{a \in SE \mid \mathbf{c}(a) - \mathbf{l}(a) \equiv x \pmod{m}, \quad x \in \llbracket 2, k \rrbracket\} \\ \text{brun} & = \{a \in SE \mid \mathbf{c}(a) - \mathbf{l}(a) \equiv x \pmod{m}, \quad x \in \llbracket k + 1, 2k - 1 \rrbracket\}. \end{array} \right.$$

On peut décomposer blanc sous la forme

$$\text{blanc} = \text{blanc}_{NO} \cup \text{blanc}_{NE} \cup \text{blanc}_{SO} \cup \text{blanc}_{SE}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{blanc}_{NO} & = \{a \in NO \mid \mathbf{c}(a) - \mathbf{l}(a) \equiv 0 \pmod{m}\} \\ \text{blanc}_{NE} & = \{a \in NE \mid \mathbf{c}(a) + \mathbf{l}(a) \equiv -1 \pmod{m}\} \\ \text{blanc}_{SO} & = \{a \in SO \mid \mathbf{c}(a) + \mathbf{l}(a) \equiv -1 \pmod{m}\} \\ \text{blanc}_{SE} & = \{a \in SE \mid \mathbf{c}(a) - \mathbf{l}(a) \equiv 0 \pmod{m}\}. \end{array} \right.$$

On remarque alors que $\{\text{blanc}_{NO}, \text{bleu}, \text{rouge}\}$ forme une partition de NO . De même, $\{\text{blanc}_{NE}, \text{pistache}, \text{azur}, \text{orange}\}$ forme une partition de NE , $\{\text{blanc}_{SO}, \text{noir}, \text{jaune}, \text{rose}\}$ forme une partition de SO et $\{\text{blanc}_{SE}, \text{vert}, \text{violet}, \text{brun}\}$ forme une partition de SE . Comme l'ensemble $\{NO, NE, SO, SE\}$ est lui-même une partition de \mathbb{A} , on en déduit que $\mathbb{B}_{\text{Dép}}$ est une partition de \mathbb{A} .

On peut ainsi définir la fonction

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\text{Dép}} : \mathbb{A} &\rightarrow \mathbb{B}_{\text{Dép}} \\ a &\mapsto \mathbf{b}_{\text{Dép}}(a) \end{aligned}$$

où $\mathbf{b}_{\text{Dép}}(a) = b$ ssi $a \in b$. On appelle $\mathbf{b}_{\text{Dép}}(a)$ la *couleur de départ* de a .

Définition des symétries

On munit $Q_{\text{Dép}}$ du repère (O, x, y) présenté figure 4.

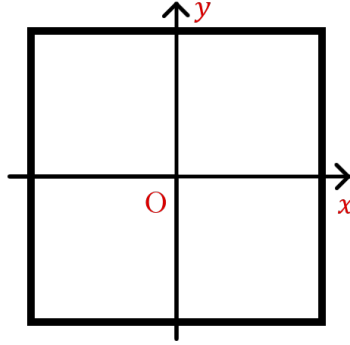


FIGURE 4 – Repère défini sur $Q_{\text{Dép}}$

On pose, pour $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

$$sp = n - 1 - p.$$

sp est donc le symétrique de p par rapport à $(n-1)/2$ sur la droite réelle.

Soient alors s_v , s_h et s_c trois fonctions de \mathbb{A} dans \mathbb{A} telles que, pour toute $a \in \mathbb{A}$:

$$\begin{cases} s_v a = a(i(a), sj(a)) \\ s_h a = a(si(a), j(a)) \\ s_c a = a(si(a), sj(a)) \end{cases}$$

D'un point de vue géométrique, s_v est la symétrie axiale d'axe (Oy) , s_h est la symétrie axiale d'axe (Ox) et s_c est la symétrie de centre O .

Remarque 1.

1.

$$s_c = s_v \circ s_h = s_h \circ s_v$$

2.

$$s_v^2 = s_h^2 = s_c^2 = \text{id}_{\mathbb{A}},$$

donc s_v , s_h et s_c sont des bijections.

Remplissage de Q_{Arr}

Soit :

$$T: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$$

$$a \mapsto \begin{cases} a & \text{si } b_{\text{Dép}}(a) = \text{blanc} \\ s_v a & \text{si } b_{\text{Dép}}(a) \in \{\text{bleu, azur, rose, violet}\} \\ s_h a & \text{si } b_{\text{Dép}}(a) \in \{\text{rouge, orange, jaune, brun}\} \\ s_c a & \text{si } b_{\text{Dép}}(a) \in \{\text{pistache, noir, vert}\} \end{cases}$$

On appellera T la *fonction transformation*. Comme nous le montrerons plus tard, cette fonction est une *bijection* de l'ensemble des cases dans lui-même.

On pose alors, pour toute $a \in \mathbb{A}$:

$$\mathbf{v}_{\text{Arr}}(Ta) = \mathbf{v}_{\text{Dép}}(a)$$

ce qui achève la construction de Q_{Arr} .

Théorème de magieité des carrés apolliniens

Théorème. *Soit $n \in \mathbb{N}, n \equiv 2 \pmod{4}$.*

Soit $Q_{\text{Dép}}$ un carré d'ordre n , rempli de gauche à droite et de haut en bas avec les entiers allant de 1 à n^2 , i.e. tel que pour toute a de \mathbb{A} :

$$\mathbf{v}_{\text{Dép}}(a) = n \cdot \mathbf{i}(a) + \mathbf{j}(a) + 1$$

Alors le carré Q_{Arr} , lui aussi d'ordre n et rempli de sorte que pour toute a de \mathbb{A} :

$$\mathbf{v}_{\text{Arr}}(Ta) = \mathbf{v}_{\text{Dép}}(a)$$

est magique (et, par construction, normal). On appelle Q_{Arr} le carré apollinien d'ordre n ⁴.

Démonstration

Dans toute cette démonstration, on fixe un ordre n satisfaisant les conditions données dans le théorème.

Bijektivité de la fonction transformation

Pour que le remplissage de Q_{Arr} soit bien défini, il faut s'assurer que la fonction transformation est bien bijective. On peut démontrer ce fait en construisant sa réciproque T^{-1} . Nous ne rentrerons pas ici dans les détails calculatoires de la construction de T^{-1} , dans la mesure où la figure 3 suffit à montrer que les blocs transformés ne se chevauchent pas et forment une partition de \mathbb{B} , et donc que T est bien bijective. Nous allons simplement exposer le principe de la construction de T^{-1} , ce qui nous permettra d'introduire de nouvelles notations qui nous seront utiles dans la suite de la démonstration.

On peut définir une nouvelle partition \mathbb{B}_{Arr} de \mathbb{A} , de manière analogue à la définition de $\mathbb{B}_{\text{Dép}}$, cette fois-ci en se basant sur le découpage en blocs présenté figure 3. On désigne les blocs de $\mathbb{B}_{\text{Dép}}$ par leur couleur suivie d'un prime (par exemple *bleu'*), hormis le bloc *blanc* qui est commun aux deux découpages. On peut ainsi introduire la fonction $\mathbf{b}_{\text{Arr}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}_{\text{Arr}}$, qui à une

4. Ce nom fait référence au plus petit des carrés apolliniens, qui est le carré d'ordre 6 dit « carré du soleil ».

case associe sa « couleur dans le carré d'arrivée ». La définition de la fonction \mathbf{T}^{-1} est alors identique à celle de la fonction \mathbf{T} , avec \mathbf{b}_{Arr} jouant le rôle de $\mathbf{b}_{\text{Dép}}$.

Remarque 2.

1. On a, pour toute a de \mathbb{A} :

$$\mathbf{v}_{\text{Arr}}(a) = \mathbf{v}_{\text{Dép}}(\mathbf{T}^{-1}a).$$

2. Pour tout b de $\mathbb{B}_{\text{Dép}}$, les notations ont été choisies de sorte que

$$b' = \mathbf{T}b.$$

Constante du carré

Commençons par noter que la somme des valeurs d'un carré d'ordre n rempli avec les entiers allant de 1 à n^2 est $n^2(n^2 + 1)/2$. Dans un carré magique, la somme de chaque ligne est donc égale à $[n^2(n^2 + 1)/2]/n = n(n^2 + 1)/2$. On appelle ce nombre la *constante du carré*.

Somme des grandes diagonales

Les grandes diagonales restent fixes lors de la construction. Ainsi, pour toute a appartenant à une grande diagonale, $\mathbf{T}a = a$, et donc $\mathbf{v}_{\text{Arr}}(a) = \mathbf{v}_{\text{Dép}}(a)$.

Diagonale principale a est sur la diagonale principale si et seulement si $i(a) = j(a)$. D'où :

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \text{diag. princ.}} \mathbf{v}_{\text{Dép}}(a) &= \sum_{i=0}^{n-1} (ni + i + 1) \\ &= (n-1) \sum_{i=0}^{n-1} i + n \\ &= (n-1) \frac{n(n-1)}{2} + n \\ &= \frac{n(n^2 - 1) + 2n}{2} \\ &= \frac{n(n^2 + 1)}{2}. \end{aligned}$$

Antidiagonale a est sur l'antidiagonale si et seulement si $i(a) + j(a) = n - 1$. D'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{a \in \text{antidiag.}} \mathbf{v}_{\text{Dép}}(a) &= \sum_{i=0}^{n-1} (ni + n - 1 - i + 1) \\
&= (n-1) \sum_{i=0}^{n-1} i + n^2 \\
&= \frac{n(n-1)^2}{2} + n^2 \\
&= \frac{n^3 - 2n^2 + n + 2n^2}{2} \\
&= \frac{n(n^2 + 1)}{2}.
\end{aligned}$$

Somme des lignes et des colonnes

Principe On appelle *demi-carré* l'union de deux quadrants adjacents.

Pour cette partie de la démonstration, on s'intéresse séparément à chaque demi-carré (Nord/Sud dans le cas des lignes, Est/Ouest dans le cas des colonnes). On ne détaillera ici le raisonnement que dans le cas du demi-carré Nord, mais le principe est le même pour les autres demi-carrés (voir plus loin).

La démonstration s'effectue en deux parties :

1. On montre que la somme de la ligne d'indice 0 du demi-carré est bien $n(n^2 + 1)/2$.
2. On montre que le passage de la ligne i à la ligne $i + 1$ laisse invariant la somme de la ligne.

On pourra ainsi en déduire que la somme de toutes les lignes est égale.

Somme de la ligne d'indice 0 Commençons par calculer explicitement $\mathbf{v}_{\text{Arr}}(a)$ pour toute case a appartenant à la ligne d'indice 0 du demi-carré Nord.

Soit $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On pose $a = \mathbf{a}(0, j)$. Comme $i(a) = 0$, $\mathbf{b}_{\text{Arr}}(a)$ est entièrement déterminé par $\mathbf{j}(a)$. On a donc :

1. Si $j \in \{0, 4k + 1\}$, $\mathbf{b}_{\text{Arr}}(a) = \text{blanc}$ et donc :

$$\mathbf{v}_{\text{Arr}}(a) = \mathbf{v}_{\text{Dép}}(a) = j + 1$$

2. Si $j \in \{1, 2k\}$, $\mathbf{b}_{\text{Arr}}(a) = \text{vert}'$ et donc :

$$\mathbf{v}_{\text{Arr}}(a) = \mathbf{v}_{\text{Dép}}(\mathbf{s}_c a) = n(n-1) + n - j = n^2 - j$$

3. Si $j \in \llbracket 2, k \rrbracket$, $\mathbf{b}_{\text{Arr}}(a) = \text{jaune}'$ et donc :

$$\mathbf{v}_{\text{Arr}}(a) = \mathbf{v}_{\text{Dép}}(\mathbf{s}_h a) = n(n-1) + j + 1$$

4. Si $j \in \llbracket k+1, 2k-1 \rrbracket$, $\mathbf{b}_{\text{Arr}}(a) = \text{azur}'$ et donc :

$$\mathbf{v}_{\text{Arr}}(a) = \mathbf{v}_{\text{Dép}}(\mathbf{s}_v a) = n - j$$

5. Si $j \in \llbracket 2k+1, 3k \rrbracket$, $\mathbf{b}_{\text{Arr}}(a) = \text{bleu}'$ et donc :

$$\mathbf{v}_{\text{Arr}}(a) = \mathbf{v}_{\text{Dép}}(\mathbf{s}_v a) = n - j$$

6. Si $j \in \llbracket 3k+1, 4k-1 \rrbracket$, $\mathbf{b}_{\text{Arr}}(a) = \text{brun}'$ et donc :

$$\mathbf{v}_{\text{Arr}}(a) = \mathbf{v}_{\text{Dép}}(\mathbf{s}_h a) = n(n-1) + j + 1$$

7. Si $j = 4k$, $\mathbf{b}_{\text{Arr}}(a) = \text{noir}'$ et donc :

$$\mathbf{v}_{\text{Arr}}(a) = \mathbf{v}_{\text{Dép}}(\mathbf{s}_c a) = n(n-1) + n - j = n^2 - j.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{v}_{\text{Arr}}(0, j) &= \underbrace{1 + (n-1+1)}_{\text{blanc}} + \underbrace{(n^2-1) + (n^2-2k)}_{\text{vert}} + \underbrace{\sum_{j=2}^k n(n-1) + j + 1}_{\text{jaune}} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{j=k+1}^{2k-1} n-j}_{\text{azur}} + \underbrace{\sum_{j=2k+1}^{3k} n-j}_{\text{bleu}} + \underbrace{\sum_{j=3k+1}^{4k-1} n(n-1) + j + 1}_{\text{brun}} + \underbrace{n^2 - 4k}_{\text{noir}} \\ &= 3n^2 + n - 6k \quad (\text{blanc} + \text{vert} + \text{noir}) \\ &\quad + n(k-1)(n-1) + \frac{(k-1)(k+4)}{2} \quad (\text{jaune}) \\ &\quad + (k-1)n - \frac{3k(k-1)}{2} \quad (\text{azur}) \\ &\quad + kn - \frac{k(5k+1)}{2} \quad (\text{bleu}) \\ &\quad + n(k-1)(n-1) + \frac{(k-1)(7k+2)}{2} \quad (\text{brun}) \\ &= n[3n + 2(n-1)(k-1) + 2k] \\ &\quad - 6k + (k-1)(4k+3) - k(4k-1) \\ &= (4k+2)[3(4k+2) + 2(4k+1)(k-1) + 2k] - 6k - 3 \\ &= (4k+2)(8k^2 + 8k + 4) - 6k - 3 \\ &= 32k^3 + 48k^2 + 26k + 5 \\ &= (2k+1)[(4k+2)^2 + 1] \end{aligned}$$

Cette dernière expression est bien égale à $n(n^2+1)/2$ et donc :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{v}_{\text{Arr}}(0, j) = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Passage d'une ligne à la suivante Nous allons montrer dans ce paragraphe que la somme de la ligne est invariante lors du passage d'une ligne à la suivante.

On fixe i appartenant à $\llbracket 0, m - 2 \rrbracket$ l'indice de la ligne de « départ » (on exclut donc la ligne d'indice $m - 1$, qui est la dernière ligne du demi-carré). On cherche donc à montrer que

$$\sum_{j=0}^{n-1} v_{\text{Arr}}(\mathbf{a}(i, j)) - \sum_{j=0}^{n-1} v_{\text{Arr}}(\mathbf{a}(i + 1, j)) = 0 \quad (*)$$

Dans le but de clarifier la démonstration, nous prendrons régulièrement appui sur l'exemple concret du carré apollinien d'ordre $n = 18$ (figure 5), c'est-à-dire le cas $k = 4$.

1	323	309	310	311	13	12	11	316	9	8	7	6	320	321	322	308	18
306	20	304	292	293	294	30	29	28	27	26	25	301	302	303	291	35	19
54	287	39	285	275	276	277	47	46	45	44	282	283	284	274	52	38	37
72	71	268	58	266	258	259	260	64	63	263	264	265	257	69	57	56	55
90	89	88	249	77	247	241	242	243	244	245	246	240	86	76	75	74	73
217	107	106	105	230	96	228	224	225	226	227	223	103	95	94	93	92	234
199	200	124	123	122	211	115	209	207	208	206	120	114	113	112	111	215	216
181	182	183	141	140	139	192	134	190	189	137	133	132	131	130	196	197	198
180	164	165	166	158	157	156	173	153	154	152	151	150	149	177	178	179	163

FIGURE 5 – Demi-carré Nord du carré apollinien d'ordre 18

Commençons par remarquer sur cet exemple que le nombre de cases de chacune des couleurs est le même pour chaque ligne. On a toujours 2 cases blanc, 2 cases vert', 3 cases jaune', 3 cases azur', 4 cases bleu', 3 cases brun' et une case noir'. De plus, les cases d'une même couleur se suivent diagonalement lorsqu'on passe d'une ligne à une autre. On a donc intuitivement envie de définir un concept de « case suivante ».

Définition. Soit $a \in \mathbb{A}$. On définit a' la case suivante de a comme la case trouvée en partant de a et en se rapprochant diagonalement du centre, c'est-à-dire en suivant la même direction que la grande diagonale qui intersecte le quadrant dans lequel se trouve a . Dans le cas critique où a se trouve sur le bord du quadrant (i. e. quand une de ses coordonnées locales vaut 0 ou $m - 1$), on considère le quadrant de manière torique pour trouver a' (cela se traduit par le modulo utilisé dans la définition de p' ci-dessous).

Formalisons cela en termes d'indices. Soit $p \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$. On définit $p' \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ comme l'unique entier tel que $p // m = p' // m$ et

$$p' = \begin{cases} p + 1 \bmod m & \text{si } p < m \\ p - 1 \bmod m & \text{si } p \geq m \end{cases}$$

On pose alors

$$a' = \mathbf{a}(\mathbf{i}(a)', \mathbf{j}(a)')$$

Dans le cas critique où a se trouve en bord de quadrant, on dira qu'on effectue un *saut* entre a et a' . On parlera ainsi de cas *hors-saut* lorsque a n'est pas située en bord de quadrant.

On vérifie alors bien la propriété suivante :

Lemme 3. *Quelque soit a appartenant à \mathbb{A} , $\mathbf{b}_{\text{Arr}}(a) = \mathbf{b}_{\text{Arr}}(a')$*

Démonstration. Cela se vérifie directement en calculant $l' - c'$ (ou $l' + c'$). \square

Ce lemme nous permet de prouver par une récurrence directe que le nombre de cases de chacune des couleurs est la même pour chaque ligne (1 case blanc, 2 cases vert', $k-1$ cases jaune', $k-1$ cases azur', k cases bleu', $k-1$ cases brun', 1 case noir'), puisque nous avons déjà montré cette propriété pour la ligne d'indice 0.

On cherche maintenant à déterminer la quantité $\mathbf{v}_{\text{Arr}}(a) - \mathbf{v}_{\text{Arr}}(a')$ pour toute a de \mathbb{A} . En effet, on veut montrer que

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{v}_{\text{Arr}}(\mathbf{a}(i, j)) - \mathbf{v}_{\text{Arr}}(\mathbf{a}(i+1, j))) = 0$$

Or, dans le cas du demi-carré Nord, l'ensemble des cases appartenant à la ligne d'indice $i+1$ coïncide avec l'ensemble des cases suivantes de cases appartenant à la ligne d'indice i , i.e. :

$$\{a \in \mathbb{A} \mid \mathbf{i}(a) = i+1\} = \{a' \mid a \in \mathbb{A} \text{ et } \mathbf{i}(a) = i\}$$

Remarquons sur l'exemple de la figure 5 que la quantité $\mathbf{v}_{\text{Arr}}(a) - \mathbf{v}_{\text{Arr}}(a')$ semble toujours pouvoir être exprimée indépendamment des coordonnées de a . Par exemple, pour les cases (0,0), (2,4) et (7,8), on a :

$$\begin{aligned} 1 - 20 &= -19 = -(n+1) \\ 275 - 258 &= 17 = n-1 \\ 190 - 180 &= 10 = m+1 \end{aligned}$$

De plus, on observe que la quantité dans le cas hors-saut et la quantité dans le cas d'un saut sont constantes au sein d'un bloc.

Nous allons démontrer ce fait en nous ramenant à l'étude d'une quantité faisant intervenir $\mathbf{v}_{\text{Dép}}$, la formule de $\mathbf{v}_{\text{Dép}}(a)$ ayant l'avantage d'être la même pour toute case a .

En effet, la formule de $\mathbf{v}_{\text{Arr}}(a)$ pour a une case quelconque n'est pas pratique à manipuler, car elle dépend de la couleur de a , et surtout de ses coordonnées. Dans le cas de la ligne d'indice 0, on connaissait exactement la répartition des couleurs le long de la ligne, et pour la majorité des blocs, leurs cases se trouvaient toutes d'affilée, ce qui facilitait grandement le calcul. Cependant, on voit bien sur l'exemple de la figure 5 que la répartition des couleurs est plus difficile à connaître pour une ligne quelconque.

On cherche donc à faire apparaître $\mathbf{v}_{\text{Dép}}$. On a d'après la remarque 2 la relation suivante :

$$\mathbf{v}_{\text{Arr}}(a) - \mathbf{v}_{\text{Arr}}(a') = \mathbf{v}_{\text{Dép}}(\mathbf{T}^{-1}a) - \mathbf{v}_{\text{Dép}}(\mathbf{T}^{-1}(a')).$$

Notons par ailleurs que :

Lemme 4. *Pour toute a de \mathbb{A}*

$$\mathbf{T}^{-1}(a') = (\mathbf{T}^{-1}a)'$$

Démonstration. Par le lemme 3, on sait que \mathbf{T}^{-1} restreinte à $\{a, a'\}$ est une symétrie éventuellement triviale (\mathbf{s}_v , \mathbf{s}_h , \mathbf{s}_c ou $\text{id}_{\mathbb{A}}$). Or, pour $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, il est facile de voir qu'on a toujours $(\mathbf{s}p)' = \mathbf{s}(p')$. Comme les opérations de symétrie reviennent à appliquer l'opérateur \mathbf{s} , soit à la coordonnée i (pour \mathbf{s}_h), soit à la coordonnée j (pour \mathbf{s}_v), soit aux deux simultanément (pour \mathbf{s}_c), soit à aucune des deux (pour $\text{id}_{\mathbb{A}}$ on a bien le résultat souhaité. \square

Remarque 5. On déduit directement de cette propriété qu'il y a un saut entre a et a' si et seulement si il y a un saut entre $\mathbf{T}^{-1}(a)$ et $\mathbf{T}^{-1}(a')$.

Ainsi, pour toute a de \mathbb{A} , on a

$$\mathbf{v}_{\text{Arr}}(a) - \mathbf{v}_{\text{Arr}}(a') = \mathbf{v}_{\text{Dép}}(\mathbf{T}^{-1}a) - \mathbf{v}_{\text{Dép}}((\mathbf{T}^{-1}a)').$$

Comme \mathbf{T}^{-1} est une bijection, on peut donc se ramener à l'étude de la quantité $D = \mathbf{v}_{\text{Dép}}(a) - \mathbf{v}_{\text{Dép}}(a')$ pour toute a appartenant à \mathbb{A} . Nous allons calculer explicitement cette quantité et montrer qu'elle ne dépend que du quadrant auquel appartient a , et de s'il y a ou non un saut entre a et a' . De plus, nous allons montrer que l'expression explicite de D ne fait plus intervenir les coordonnées de a .

Lemme 6. *Soit a appartenant à \mathbb{A} telle que $\mathbf{i}(a) \notin \{m-1, m\}$ ⁵.*

La quantité $D = \mathbf{v}_{\text{Dép}}(a) - \mathbf{v}_{\text{Dép}}(a')$ ne dépend que du quadrant auquel appartient a , et de s'il y a ou non un saut entre a et a' ⁶. Plus précisément :

5. Cela signifie qu'on exclut le cas où a se trouve sur une ligne « centrale » du carré, puisque que les cas de sauts *en y* ne nous intéressent pas ici (voir le repère figure 4).

6. On ne parle donc ici que des cas de sauts *en x* (voir le repère figure 4)

1. Qu'il y ait saut ou non, le signe de D ne dépend que du demi-carré horizontal (Nord ou Sud) auquel appartient a .
 - Si a appartient au demi-carré Nord, alors $D < 0$.
 - Si a appartient au demi-carré Sud, alors $D > 0$.
2. $|D|$ ne dépend que du quadrant auquel appartient a et du fait qu'il y ait saut ou non.
 - Si a appartient à $NO \cup SE$: si a est un cas de saut, $|D| = m + 1$.
Si a est un cas hors-saut, $|D| = n + 1$
 - Si a appartient à $NE \cup SO$: si a est un cas de saut, $|D| = n + m - 1$.
Si a est un cas hors-saut, $|D| = n - 1$.

Démonstration. Ces propriétés découlent directement de la manière dont on a défini la case suivante.

1. Comme $Q_{\text{Dép}}$ est rempli « de gauche à droite et de haut en bas » avec les entiers de 1 à n^2 , il est évident que les valeurs des cases croissent en même temps que les indices de ligne. Pour $a = \mathbf{a}(i, j)$ on a donc :
 - Si a est dans le demi-carré Nord, alors a' est sur la ligne $i + 1$, et donc $\mathbf{v}_{\text{Dép}}(a') > \mathbf{v}_{\text{Dép}}(a)$. D'où $D < 0$.
 - Si a est dans le demi-carré Sud, alors a' est sur la ligne $i - 1$, et donc $\mathbf{v}_{\text{Dép}}(a') < \mathbf{v}_{\text{Dép}}(a)$. D'où $D > 0$.
2. Soit $a = \mathbf{a}(i, j)$. On note que $D = n(i - i') + (j - j')$.

La valeur de $|D|$ dans les cas hors-saut vient simplement du fait qu'on se déplace suivant la diagonale principale dans les quadrants NO ou SE (on peut voir cela comme un déplacement de coordonnées $\pm(1, 1)$, c'est à dire que $i - i' = j - j' = \pm 1$), et suivant l'antidiagonale dans les quadrants NE ou SO (on peut voir cela comme un déplacement de coordonnées $\pm(1, -1)$, c'est à dire que $i - i' = -(j - j') = \pm 1$). On a alors directement le résultat souhaité.

On s'intéresse maintenant aux cas avec saut. Si a est un cas avec saut, c'est qu'on passe du bord gauche au bord droit du quadrant ou inversement lors du saut de a à a' . Donc $j - j' = \pm(m - 1)$, et $D = \pm n \pm (m - 1)$.

- Si $a \in NO \cup SE$, on vérifie facilement via la définition de la case suivante que dans les deux quadrants concernés, les deux signes sont toujours identiques. Donc $|D| = n + m - 1$.
- Si $a \in NE \cup SO$, on vérifie facilement via la définition de la case suivante que dans les deux quadrants concernés, les deux signes sont toujours différents. Donc $|D| = n - m + 1$, i.e. $|D| = m + 1$.

□

On déduit de ce lemme que pour toute case a , la quantité $\mathbf{v}_{\text{Arr}}(a) - \mathbf{v}_{\text{Arr}}(a')$ ne dépend que du quadrant dans lequel se trouve $\mathbf{T}^{-1}(a)$, et de s'il y a ou non un saut entre a et a' (voir la Remarque 5). Supposant ces

informations connues, on est de plus capable de donner une valeur explicite de cette quantité ne faisant plus intervenir les coordonnées de a .

On note grâce à la remarque 2 qu'il suffit de connaître $\mathbf{b}_{\text{Arr}}(a)$ pour en déduire le quadrant auquel appartient $\mathbf{T}^{-1}(a)$. Par exemple, tous les antécédents des cases appartenant aux blocs **jaune'** et **noir'** appartiennent aux blocs **jaune** et **noir**, qui eux-mêmes sont inclus dans SO : on dira que les cases des blocs **jaune'** et **noir'** *proviennent* du quadrant SO).

Puisque le nombre de cases de chaque couleur est le même pour toute ligne, on en déduit qu'il y a sur chaque ligne exactement :

- $k + 1$ cases qui proviennent du quadrant NO (k cases **bleu'** et 1 case blanc_{NO})
- k cases qui proviennent du quadrant NE ($k - 1$ cases **azur'** et 1 case blanc_{NE})
- k cases qui proviennent du quadrant SO ($k - 1$ cases **jaune'** et 1 case **noir'**)
- $k + 1$ cases qui proviennent du quadrant SE ($k - 1$ cases **brun'** et 2 cases **vert'**)

Il ne nous reste donc plus qu'à déterminer quelles cases sont des cas de sauts pour montrer (*).

On note qu'il y a toujours exactement deux cas de sauts lorsqu'on passe d'une ligne à la suivante (un pour chaque quadrant), et les différentes paires de sauts possibles sont indiquées par la figure 3. Ces sont les paires suivantes : **vert'/bleu'**, **azur'/bleu'**, **jaune'/brun'**, **vert'/noir'**. Il nous suffit de montrer en utilisant le Lemme 6 que $\sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{v}_{\text{Arr}}(\mathbf{a}(i, j)) - \mathbf{v}_{\text{Arr}}(\mathbf{a}(i + 1, j)))$ est bien égale à 0 dans chacun de ces quatre cas. Par exemple, dans le cas **vert'/bleu'**, on sait qu'il y a une des cases provenant du quadrant NO et une des cases provenant de SE qui sont des cas de sauts. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{v}_{\text{Arr}}(\mathbf{a}(i, j)) - \mathbf{v}_{\text{Arr}}(\mathbf{a}(i + 1, j))) &= -k(n + 1) - (m + 1) \quad (NO) \\
&\quad - k(n - 1) \quad (NE) \\
&\quad + k(n - 1) \quad (SO) \\
&\quad + k(n + 1) + (m + 1) \quad (SE) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Les trois autres cas sont similaires. On peut donc en déduire que (*) est toujours vérifiée. Ainsi, la somme de toutes les lignes du demi-carré Nord est bien égale à $n(n^2 + 1)/2$.

Le résultat se montre de manière analogue sur les trois autres demi-carrés. On ne commence cependant pas toujours par calculer la somme de la ligne ou colonne d'indice 0. On s'intéresse plutôt à la ligne ou la colonne du demi-carré qui correspond à un bord du carré (i. e. la ligne/colonne d'indice $n - 1$ dans le cas des demi-carrés Sud et Est) pour rester cohérent avec notre idée de se rapprocher progressivement du centre du carré. Notez également

que dans le cas des demi-carrés Est et Ouest, on étudie les colonnes et non plus les lignes, et donc on s'intéresse uniquement aux cas de sauts en y . La valeur diffère de celle des sauts en x , mais s'exprime toujours uniquement en fonction de m et n en ne dépend que du quadrant auquel appartient a ($NO \cup SE$ ou $NE \cup SO$).

Conclusion

On déduit de tout ce qui précède que dans le carré apollinien d'ordre n , la somme de chacune des grande diagonale est égale à la somme de chaque ligne est égale à la somme de chaque colonne est égale à $n(n^2 + 1)/2$, ce qui achève la démonstration du théorème. \square