

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES
DE NANCY



Impact marché en finance : analyse et explications

Projet 3A Ingénierie Mathématique

Fait par : MASROUR Oussama

Encadré par : PEYRE Rémi

Table des matières

1	Introduction	2
2	Dynamique du carnet d'ordre latent	2
2.1	Modèle des Équations aux Dérivées Partielles pour le Carnet d'Ordres Latent	2
2.2	Le lien entre la diffusion et le modèle financier	5
2.2.1	Première démonstration	5
2.2.2	Deuxième démonstration	7
2.3	Régime stationnaire du carnet d'ordres latent	10
3	Loi de racine de Q	12
3.1	Dynamique du prix pour un carnet d'ordre localement linéaire	12
3.2	Démonstration de la loi de racine de Q	13
4	Comparaison des modèles d'impact de marché sur des données simulées	17
5	Conclusion	22
A	Annexe : Démonstration probabiliste de la diffusion	23
B	Annexe : Code python des graphiques	28
C	Annexe : Code python de la section 4	32

1 Introduction

L'impact de marché, c'est-à-dire l'influence des transactions sur les prix des actifs financiers, constitue un domaine central de la finance théorique. Il reflète la manière dont l'offre et la demande d'actifs influencent les prix par le biais des ordres passés sur les marchés. Cet impact est une préoccupation majeure pour les investisseurs institutionnels, car il conditionne leurs stratégies d'exécution et affecte les coûts de transaction. De ce fait, la compréhension des mécanismes sous-jacents à l'impact de marché est essentielle pour optimiser les pratiques de trading et mieux réguler les marchés financiers.

Depuis les travaux pionniers de Kyle en 1985, qui ont introduit l'idée d'un impact linéaire et permanent des ordres sur les prix, les modèles théoriques ont largement évolué. Toutefois, les découvertes empiriques des deux dernières décennies ont révélé des dynamiques beaucoup plus complexes. En particulier, plusieurs études ont montré que l'impact moyen d'un méta-ordre (un ensemble d'ordres fragmentés exécutés sur une période prolongée) suit une loi non linéaire en racine carrée de la quantité totale échangée : Q .

Cette loi, appelée "loi de la racine carrée", semble remarquablement universelle. Elle s'observe de manière cohérente, indépendamment des types de marchés (actions, contrats à terme, options, crypto-monnaies), des régions géographiques (Europe, États-Unis, Asie) et des périodes analysées. Ce caractère universel suscite une interrogation fondamentale : pourquoi l'impact des méta-ordres ne croît-il pas de manière proportionnelle à la taille des transactions, mais de manière sous-linéaire ?

Une explication repose sur la notion de carnet d'ordres latent (LOB - Latent Order Book). Ce modèle théorique suggère que les ordres visibles dans le carnet d'ordres ne représentent qu'une fraction des intentions d'achat et de vente réelles. Le carnet d'ordres latent englobe l'ensemble des ordres potentiels qui pourraient être placés en réponse à des changements de prix. Cette dynamique conduit à des phénomènes d'auto-équilibrage du marché, limitant l'impact des méta-ordres et expliquant la loi en racine carrée.

Le présent rapport se propose de modéliser l'impact des méta-ordres à travers une approche inspirée des modèles de diffusion-réaction. Ces modèles, empruntés à la physique statistique, permettent de décrire la dynamique des carnets d'ordres latents et de capturer les mécanismes d'interaction entre ordres d'achat et de vente. L'objectif est de démontrer pourquoi l'impact suit une loi en \sqrt{Q} . Cette étude s'appuie notamment sur les résultats et les approches présentés dans l'article [1], qui constitue une base essentielle de cette analyse.

2 Dynamique du carnet d'ordre latent

2.1 Modèle des Équations aux Dérivées Partielles pour le Carnet d'Ordres Latent

Dans cette étude, nous supposons un modèle sans intelligence, c'est-à-dire un cadre où les intentions de trading sont déterminées par des processus relativement simples. Ces processus n'incluent ni l'anticipation des prix futurs ni l'usage de stratégies compliquées. On note $\rho_B(x, t)$ la densité volumique des intentions de vente et $\rho_A(x, t)$ celle des intentions d'achat. Ces densités permettent de définir le volume total Q qu'on aurait l'intention d'acheter ou de vendre sur un intervalle de prix $[x_1, x_2]$ par les expressions suivantes :

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} \rho_B(x, t) dx \quad (\text{pour les ventes}), \quad Q = \int_{x_1}^{x_2} \rho_A(x, t) dx \quad (\text{pour les achats}).$$

Dans ce cadre, les traders réajustent leurs prix d'achat ou de vente de deux manières principales. D'une part, ils peuvent réagir collectivement à de nouvelles informations du marché, telles

que des annonces économiques, des rapports d'entreprise ou des fluctuations de prix significatives. D'autre part, les ajustements peuvent être individuels et résulter de besoins spécifiques ou de stratégies personnelles. Les traders peuvent également formuler de nouvelles intentions en entrant des ordres dans le carnet, ou au contraire annuler des intentions précédemment soumises. Ces décisions, qu'elles soient collectives ou individuelles, influencent la dynamique globale du marché.

Lorsque des ordres d'achat rencontrent des ordres de vente à des prix similaires, ces intentions respectives peuvent s'annuler, ce qui conduit à des transactions effectives. Ce processus d'interaction entre les intentions d'achat et de vente se manifeste par des ajustements continus dans le carnet d'ordres, traduisant l'équilibre dynamique entre l'offre et la demande.

Ainsi, pour modéliser ces dynamiques, les densités volumiques $\rho_B(x, t)$ et $\rho_A(x, t)$ obéissent au système d'équations aux dérivées partielles suivant, qui intègre les effets de réévaluation des prix, d'annulation, de dépôt d'ordres et de réaction entre intentions opposées :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_B(x, t)}{\partial t} = -V_t \frac{\partial \rho_B(x, t)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho_B(x, t)}{\partial x^2} - \nu \rho_B(x, t) + \lambda \Theta(p_t - x) - \kappa R_{AB}(x, t), \\ \frac{\partial \rho_A(x, t)}{\partial t} = -V_t \frac{\partial \rho_A(x, t)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho_A(x, t)}{\partial x^2} - \nu \rho_A(x, t) + \lambda \Theta(x - p_t) - \kappa R_{AB}(x, t). \end{cases} \quad (1)$$

Le prix p_t est défini implicitement par l'équilibre entre l'offre et la demande, ce qui se traduit par l'égalité $\rho_A(p_t, t) = \rho_B(p_t, t)$. Ce prix représente un point d'équilibre autour duquel l'intensité des intentions d'achat et de vente est identique, constituant ainsi le niveau où la plupart des transactions sont susceptibles de se produire. Ce mécanisme d'équilibre entre l'offre et la demande est essentiel pour comprendre la dynamique des prix sur les marchés financiers.

On voit dans la figure 1 un exemple de l'évolution des densités volumiques d'achat ρ_B et de vente ρ_A pour un prix $p_t = 100$. On remarque que ρ_B est décroissante et convexe alors que ρ_A est croissante et concave.

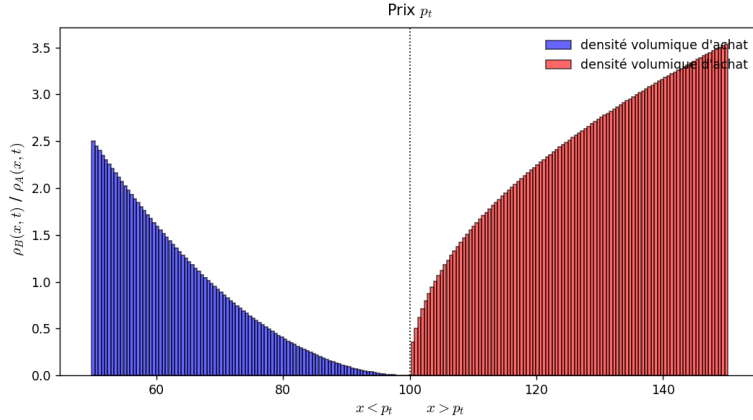


FIGURE 1 – Evolution des densités volumiques

Les différents termes dans le système d'EDP (1) modélisent les divers phénomènes caractéristiques des carnets d'ordres et des comportements des traders :

1. **Drift et diffusion** : Les termes $-V_t \frac{\partial \rho_B(x, t)}{\partial x}$ et $D \frac{\partial^2 \rho_B(x, t)}{\partial x^2}$ décrivent deux mécanismes fondamentaux. Le terme de drift, $-V_t \frac{\partial \rho_B(x, t)}{\partial x}$, traduit une réévaluation collective des prix de réservation, souvent déclenchée par l'arrivée d'informations importantes. Par définition, le prix de réservation représente le prix maximal (dans le cas d'un acheteur) ou minimal (dans le cas d'un vendeur) qu'un participant au marché est prêt à accepter pour effectuer une transaction. En parallèle, le terme de diffusion, $D \frac{\partial^2 \rho_B(x, t)}{\partial x^2}$, capture les ajustements aléatoires dans les prix de réservation des traders, dus à des incertitudes ou à des décisions individuelles imprévisibles.

Ensemble, ces termes reflètent l'évolution continue et stochastique des intentions dans le marché. On montre dans la sous-partie suivante comment on obtient ces termes.

2. **Annulation** : Le terme $-\nu\rho_B(x, t)$ représente l'annulation partielle ou totale des intentions d'achat ou de vente à un prix donné. Le paramètre ν est supposé constant et indépendant du prix, traduisant un taux uniforme auquel les ordres sont annulés, soit en raison de changements dans les priorités des traders, soit pour des raisons techniques ou stratégiques.

3. **Apparition d'ordres** : Les termes $\lambda\Theta(p_t - x)$ et $\lambda\Theta(x - p_t)$ représentent respectivement l'arrivée de nouvelles intentions d'achat et de vente dans le carnet d'ordres. La constante λ mesure l'intensité avec laquelle ces ordres apparaissent, reflétant le flux continu d'opportunités perçues par les traders sur le marché. Le choix de la fonction $\Theta(u)$, qui discrimine les zones d'achat ($u > 0$) et de vente ($u < 0$), n'est pas critique pour notre étude. Par souci de simplicité, on adopte une fonction définie par :

$$\Theta(u) = \begin{cases} 1, & \text{si } u > 0, \\ 0, & \text{si } u \leq 0. \end{cases}$$

Ce mécanisme capture la façon dont les traders réagissent en entrant de nouveaux ordres lorsqu'ils perçoivent une opportunité favorable.

4. **Réaction** : Le terme $-\kappa R_{AB}(x, t)$, où $R_{AB}(x, t) = \rho_A(x, t)\rho_B(x, t)$, modélise les transactions résultant de la rencontre entre intentions d'achat et de vente. Ce terme reflète le processus par lequel les ordres d'achat et de vente se neutralisent pour former des transactions. La constante κ contrôle la rapidité avec laquelle ces réactions se produisent. Lorsque $\kappa \rightarrow \infty$, les intentions proches du prix p_t se matérialisent immédiatement en transactions, ce qui correspond à un carnet d'ordres hautement liquide. Ce cas limite simplifie l'analyse en supposant que toutes les intentions autour du prix d'équilibre sont instantanément exécutées. Dans ce qui suit, nous adoptons ce cas limite pour nos développements.

Ces équations offrent une approximation des dynamiques des intentions de trading, permettant de décrire les comportements moyens des traders tout en négligeant la granularité des ordres, qui sont par nature discrets. Le prix instantané p_t^{inst} est défini comme la moyenne entre le prix d'achat le plus élevé b et le prix de vente le plus bas a :

$$p_t^{\text{inst}} = \frac{a + b}{2}.$$

Ce prix représente une estimation ponctuelle du point d'équilibre dans le carnet d'ordres à un instant donné. En pratique, il peut diverger légèrement du prix théorique p_t , même lorsque $\kappa \rightarrow \infty$, en raison de l'existence d'un écart $a - b > 0$. Cet écart, également appelé "spread bid-ask", est une caractéristique inhérente aux marchés discrets, traduisant les coûts de transaction et la liquidité limitée.

Dans le cadre de notre modèle, nous supposons que ces écarts sont négligeables afin de simplifier l'analyse mathématique et de concentrer notre étude sur les mécanismes globaux. Cette hypothèse permet également de traiter les densités volumiques d'achat et de vente comme des fonctions continues et différentiables, facilitant ainsi l'utilisation des équations aux dérivées partielles pour décrire les évolutions dynamiques.

En dépit de ces simplifications, ce cadre capture les mécanismes fondamentaux des marchés financiers, tels que l'ajustement des intentions, la matérialisation des transactions, et l'impact des phénomènes de diffusion, de réaction, et d'annulation. Ces hypothèses simplifiées constituent une base puissante pour l'analyse des dynamiques du carnet d'ordres et offrent une interprétation intuitive des interactions complexes qui sous-tendent la formation des prix. En ce sens, le modèle constitue un équilibre entre réalisme et tractabilité analytique, en permettant de mieux comprendre les comportements collectifs et individuels des participants au marché.

2.2 Le lien entre la diffusion et le modèle financier

Dans cette section, nous cherchons à démontrer l'origine des termes de dérive et de diffusion dans l'équation (1), à savoir $-V_t \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x}$ et $D \frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2}$, qui modélisent respectivement un flux dirigé induit par une tendance globale et un phénomène de dispersion aléatoire. Nous supposons que dans notre modèle, les ajustements du prix de réservation des agents constituent les seuls mécanismes en jeu, excluant toute apparition ou annulation d'intentions, ainsi que tout terme de réaction. Pour établir ces termes, nous débutons par une première démonstration basée sur le mouvement brownien des particules. Cependant, nous montrons rapidement que ce raisonnement reste insuffisant pour rendre compte de certains phénomènes caractéristiques des marchés financiers. En particulier, il ne capture pas le lien observé entre le coefficient de diffusion D et la volatilité du marché σ^2 , un aspect dont nous reparlerons à la fin de la partie 5 du rapport. Afin de compléter notre analyse dans cette section, nous introduisons une démonstration plus élaborée et complexe, pour modéliser les dynamiques des agents et les interactions sous-jacentes. Cette approche, bien que mathématiquement plus exigeante, permet de mieux justifier les termes de l'équation (1) et de relier les paramètres du modèle à des observables réels, offrant ainsi une perspective plus riche et adaptée aux spécificités des marchés financiers. En plus de ces deux démonstrations, qui reposent sur une approche basée sur les équations aux dérivées partielles, nous présenterons dans l'Annexe A une troisième approche, de nature probabiliste, permettant d'établir un lien entre la diffusion et notre modèle financier.

2.2.1 Première démonstration

Nous supposons que les particules – qui, dans notre cadre, représentent les prix de réservation – suivent un mouvement brownien. Elles subissent des déplacements aléatoires à chaque instant, causés par les interactions avec les molécules du fluide environnant. À chaque intervalle de temps $[t, t + dt]$, avec dt très petit, chaque particule effectue un déplacement aléatoire d'une quantité ϵ . Nous notons $\Psi_x(\epsilon)$ la densité de probabilité décrivant la probabilité qu'une particule se déplace de ϵ pendant $[t, t + dt]$, sachant qu'elle part initialement de x . Par définition, cette densité satisfait la condition de normalisation :

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi_x(\epsilon) d\epsilon = 1.$$

et :

$$\mathbb{P}(\text{ma particule arrive entre } x + y \text{ et } x + y + dy \mid \text{elle part de } x) = \Psi_x(y) dy.$$

Nous supposons qu'une dérive temporelle V_t influence le mouvement des particules. Dans ce cas, le déplacement moyen des particules pendant l'intervalle de temps $[t, t + dt]$ est donné par :

$$\int_{\mathbb{R}} \epsilon \Psi_x(\epsilon) d\epsilon = V_t dt,$$

Nous notons $f(x, t)$ le nombre de particules entre x et $x + dx$ au temps t . Ainsi, le nombre de particules situées en x à dx près et effectuant un saut de ϵ à $d\epsilon$ près est donné par $f(x, t) \Psi_x(\epsilon) dx d\epsilon$. Ceci signifie que, si l'on note X le point de départ et \mathcal{E} l'amplitude du saut, alors la densité jointe du couple (X, \mathcal{E}) est donnée par $(x, \epsilon) \rightarrow f(x, t) \Psi_x(\epsilon)$. Nous allons démontrer :

$$f(x, t + dt) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \epsilon, t) \Psi_{x-\epsilon}(\epsilon) d\epsilon.$$

On note Y le point d'arrivée, avec $Y = X + \mathcal{E}$. Soit $(x, y) \rightarrow \sigma(x, y)$ la densité jointe du couple de variables aléatoires (X, Y) . Pour une fonction test $\phi(x, y)$, on a donc :

$$\mathbb{E}(\phi(X, Y)) = \mathbb{E}(\phi(X, X + \mathcal{E})) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, \epsilon + x) f(x, t) \Psi_x(\epsilon) dx d\epsilon.$$

On effectue le changement de variable $(x, y) = (x, x + \epsilon)$, où $y = x + \epsilon$. La matrice Jacobienne J associée à ce changement de variable est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial \epsilon} & \frac{\partial y}{\partial \epsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $|\det(J)| = 1$. Par suite, en utilisant le changement de variable, on obtient :

$$\mathbb{E}(\phi(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) f(x, t) \Psi_x(y - x) dx dy.$$

Or, par définition de $\sigma(x, y)$, on a aussi :

$$\mathbb{E}(\phi(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) \sigma(x, y) dx dy.$$

En identifiant les deux expressions, on en déduit :

$$\sigma(x, y) = f(x, t) \Psi_x(y - x).$$

La densité marginale en y est le nombre de particules dans un voisinage de la position finale y à l'instant $t + dt$, donc c'est $f(y, t + dt)$, par suite :

$$f(y, t + dt) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x, y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) \Psi_x(y - x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y - \epsilon, t) \Psi_{y-\epsilon}(\epsilon) d\epsilon.$$

Ainsi, la densité des particules à la position x à l'instant $t + dt$ est :

$$f(x, t + dt) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \epsilon, t) \Psi_{x-\epsilon}(\epsilon) d\epsilon.$$

Nous allons démontrer maintenant notre équation de diffusion. Nous commençons par linéariser au premier ordre la variable du temps de f :

$$f(x, t + dt) = f(x, t) + dt \frac{\partial f}{\partial t},$$

et en linéarisant au second ordre la variable de l'espace, nous avons :

$$f(x - \epsilon, t) = f(x, t) - \epsilon \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x, t + dt) &= \int_{\mathbb{R}} \left(f(x, t) - \epsilon \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \epsilon^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \Psi(\epsilon) d\epsilon \\ &= f(x, t) \int_{\mathbb{R}} \Psi(\epsilon) d\epsilon - \frac{\partial f}{\partial x} \int_{\mathbb{R}} \epsilon \Psi(\epsilon) d\epsilon + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \epsilon^2 \Psi(\epsilon) d\epsilon. \end{aligned}$$

Par suite

$$f(x, t) + dt \frac{\partial f}{\partial t} = f(x, t) - V_t dt \frac{\partial f}{\partial x} + \tilde{D} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \text{avec} \quad \tilde{D} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \epsilon^2 \Psi(\epsilon) d\epsilon$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -V_t \frac{\partial f}{\partial x} + D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{où} \quad D = \frac{\tilde{D}}{dt}.$$

À la suite de cette démonstration, nous avons trouvé l'équation aux dérivées partielles que nous recherchions. Cette équation décrit correctement l'évolution de la densité de particules en fonction du temps et de l'espace (le prix). Toutefois, nous avons observé que la constante de diffusion

D obtenue dans cette approche ne semble pas liée à la volatilité du marché σ^2 , alors qu'une telle relation est généralement attendue dans les modèles financiers. Cette observation suggère que notre raisonnement, fondé sur le mouvement brownien, ne capture pas pleinement cette relation, pourtant essentielle dans le cadre des marchés financiers. Par conséquent, nous allons maintenant introduire une démonstration plus approfondie, prenant en compte des dynamiques plus complexes, afin de mieux comprendre et justifier la relation entre D et σ^2 , et d'améliorer ainsi notre modèle.

2.2.2 Deuxième démonstration

Dans ce nouveau raisonnement, nous supposons que chaque agent du marché est supposé réviser son prix de réservation p_i à chaque intervalle de temps $[t, t + \delta t]$. Cette révision est modélisée par deux composantes :

- Une *composante collective* $\beta_i \xi_t$, où ξ_t représente une information publique (telles que des nouvelles, des variations des prix passés, etc.) partagée par tous les agents économiques, et β_i une sensibilité individuelle spécifique à chaque agent, avec $\beta_i > 0$. Cette sensibilité β_i varie d'un agent à l'autre, certains réagissant plus fortement que d'autres à l'information. De plus, β_i est indépendante du prix x et peut évoluer au fil du temps, bien que pour simplifier les notations, nous choisissons de maintenir β_i (plutôt que $\beta_{i,t}$). La distribution des valeurs de β_i est donnée par la fonction de densité $\Pi(\beta)$, et son espérance est $\mathbb{E}(\beta) = 1$.
- Une *composante idiosyncratique* $\eta_{i,t}$, propre à chaque agent, qui représente des fluctuations aléatoires indépendantes dans le temps et entre agents. Ces fluctuations suivent une distribution $R(\eta)$, d'espérance $\mathbb{E}(\eta) = 0$ de variance $\text{Var}(\eta) = \Sigma$.

Ces révisions font évoluer la densité d'ordres latents $\rho(x, t)$ ($\rho_B(x, t)$ ou $\rho_A(x, t)$)

L'équation intégrale

$$\rho(x, t + \delta t) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \rho(y, t) \Pi(\beta) R(\eta) \delta(x - y - \beta \xi_t - \eta) d\beta dy d\eta.$$

En procédant à un changement de variables multidimensionnel, suivant le même raisonnement que dans la première démonstration (avec un jacobien égal à 1), nous obtenons :

$$\rho(x, t + \delta t) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \rho(x - \beta \xi_t - \eta, t) \Pi(\beta) R(\eta) d\beta d\eta$$

décrit l'évolution de la densité d'ordres latents $\rho(x, t)$, qui représente le nombre d'ordres autour d'un prix x à un instant donné t . Elle modélise comment les agents présents à un prix initial y à l'instant t révisent leurs prix pour arriver à x au temps $t + \delta t$. Les révisions de prix résultent de deux facteurs (collective et idiosyncratique).

L'intégrale sur y capture les contributions de tous les prix initiaux, tandis que le $\delta(x - y - \beta \xi_t - \eta)$ impose que seuls les agents ayant révisé leur prix de y à x contribuent à $\rho(x, t + \delta t)$.

On va démontrer le développement limité :

$$\rho(x, t + \delta t) - \rho(x, t) = -\xi_t \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} (\mathbb{E}(\beta^2) \xi_t^2 + \Sigma^2) \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}$$

On suppose que $-\beta \xi_t - \eta$ est petit, en faisant un développement de Taylor du second ordre par rapport à la première variable de ρ , on trouve :

$$\rho(x - \beta \xi_t - \eta) = \rho(x, t) + (-\beta \xi_t - \eta) \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} (-\beta \xi_t - \eta)^2 \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}$$

On multiplie par $\Pi(\beta) R(\eta)$ et on intègre pour trouver :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \rho(x - \beta\xi_t - \eta, t) \Pi(\beta) R(\eta) d\beta d\eta &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \rho(x, t) \Pi(\beta) R(\eta) d\beta d\eta \\
&\quad - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\beta\xi_t \eta) \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \Pi(\beta) R(\eta) d\beta d\eta \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\beta\xi_t + \eta)^2 \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} \Pi(\beta) R(\eta) d\beta d\eta \\
&= \rho(x, t) - \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \left(\xi_t \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \beta \Pi(\beta) R(\eta) d\beta d\eta + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \eta \Pi(\beta) R(\eta) d\beta d\eta \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} \left(\xi_t^2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \beta^2 \Pi(\beta) R(\eta) d\beta d\eta + 2\xi_t \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \beta \eta \Pi(\beta) R(\eta) d\beta d\eta \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} \left(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \eta^2 \Pi(\beta) R(\eta) d\beta d\eta \right) \\
&= \rho(x, t) - \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} (\xi_t \mathbb{E}(\beta) + \mathbb{E}(\eta)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} (\xi_t^2 \mathbb{E}(\beta^2) + 2\xi_t \mathbb{E}(\beta) \mathbb{E}(\eta) + \mathbb{E}(\eta^2)).
\end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{E}(\beta) = 1$, $\mathbb{E}(\eta) = 0$ et $\text{Var}(\eta) = \Sigma^2 = \mathbb{E}(\eta^2)$, on trouve :

$$\rho(x, t + \delta t) = \rho(x, t) - \xi_t \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} (\xi_t^2 \mathbb{E}(\beta^2) + \Sigma^2) \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}.$$

On distingue 2 cas pour ξ_t : $\xi_t = V_t \delta t$ et $\xi_t = V_t \sqrt{\delta t}$. Dans le premier cas, on aura :

$$\rho(x, t + \delta t) - \rho(x, t) = -V_t \delta t \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} (\mathbb{E}(\beta^2) V_t^2 \delta t^2 + \Sigma^2) \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}.$$

On tend $\delta t \rightarrow 0$, et comme $dt^2 = 0$, on a alors l'EDP :

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -V_t \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} + D_0 \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2},$$

avec $\Sigma^2 = 2D_0 \delta t$.

On remarque que dans ce premier cas, on retrouve presque exactement la même situation que celle du mouvement brownien que nous avons abordée dans la sous-section précédente. Le cas devient rigoureusement équivalent si tous les agents réagissent de manière identique aux nouvelles, c'est-à-dire si $\beta_i = 1$ pour tout i . Ainsi, nous revenons au problème initial, à savoir la non-proportionnalité entre D_0 et la volatilité du marché σ^2 . En effet, D_0 est proportionnelle à la variance de la composante idiosyncratique Σ^2 , mais cette dernière n'a aucune raison d'être liée à σ^2 . Nous allons donc examiner le deuxième cas de ξ_t .

Dans ce deuxième cas, $\xi_t = V_t \sqrt{\delta t}$. V_t vérifie les propriétés suivantes :

- entre deux instants t et t' , V_t et $V_{t'}$ sont indépendantes.
- $\text{Var}(V_t) = \sigma^2$.

Donc $\xi_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \delta t)$, et ξ_t se comporte comme un incrément d'un mouvement brownien qu'on note σW_t .

$$\rho(x, t + \delta t) - \rho(x, t) = -\sigma \delta W_t \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} + (\mathbb{E}(\beta^2) V_t^2 \delta t + \Sigma^2) \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}.$$

De même, on tend $\delta t \rightarrow 0$, on trouve :

$$d\rho(x, t) = -\sigma dW_t \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} (\mathbb{E}(\beta^2) V_t^2 dt + \Sigma^2) \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}.$$

D'où :

$$d\rho(x, t) = -\sigma dW_t \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2}(\mathbb{E}(\beta^2)\sigma^2 dt + \Sigma^2) \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}.$$

On a donc notre EDP :

$$d\rho(x, t) = -\sigma dW_t \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} + D dt \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}, \quad (2)$$

avec $D = \mathbb{E}(\beta^2)\sigma^2/2 + D_0$. À ce stade, nous commençons à percevoir le lien qui existe entre le coefficient de diffusion et la volatilité du marché. En effet, une proportionnalité apparaît entre D et σ^2 lorsque $D_0 = 0$. Nous allons maintenant simplifier notre EDP afin d'obtenir une forme qui sera essentielle pour la suite de l'analyse dans la partie 3 du rapport.

Nous effectuons le changement de variable $y = x - \hat{p}_t$, avec $\hat{p}_t = \int_0^t \sigma dW_s$. On note $\hat{\rho}(y, t) = \rho(x, t)$. Alors par le lemme d'Ito :

$$\hat{\rho}(y - \sigma dW_t, t + dt) - \hat{\rho}(y, t) = \frac{\partial \hat{\rho}(y, t)}{\partial t} dt - \sigma dW_t \frac{\partial \hat{\rho}(y, t)}{\partial y} + \frac{1}{2}(-\sigma dW_t)^2 \frac{\partial^2 \hat{\rho}(y, t)}{\partial y^2}.$$

Comme $dW_t^2 = dt$, donc :

$$\hat{\rho}(y - \sigma dW_t, t + dt) - \hat{\rho}(y, t) = \frac{\partial \hat{\rho}(y, t)}{\partial t} dt - \sigma dW_t \frac{\partial \hat{\rho}(y, t)}{\partial y} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \hat{\rho}(y, t)}{\partial y^2} dt.$$

D'autre part :

$$\frac{\partial \hat{\rho}(y, t)}{\partial y} = \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x}$$

et :

$$\frac{\partial^2 \hat{\rho}(y, t)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}.$$

L'EDP (2) peut être réécrite sous la forme :

$$\hat{\rho}(y - \sigma dW_t, t + dt) - \hat{\rho}(y, t) = -\sigma dW_t \frac{\partial \hat{\rho}(y, t)}{\partial y} + D \frac{\partial^2 \hat{\rho}(y, t)}{\partial y^2} dt.$$

Par suite :

$$\frac{\partial \hat{\rho}(y, t)}{\partial t} dt - \sigma dW_t \frac{\partial \hat{\rho}(y, t)}{\partial y} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \hat{\rho}(y, t)}{\partial y^2} dt = -\sigma dW_t \frac{\partial \hat{\rho}(y, t)}{\partial y} + D \frac{\partial^2 \hat{\rho}(y, t)}{\partial y^2} dt$$

Nous trouvons alors :

$$\frac{\partial \hat{\rho}(y, t)}{\partial t} = (D - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{\partial^2 \hat{\rho}(y, t)}{\partial y^2},$$

On note :

$$\hat{D} = D - \frac{\sigma^2}{2} = D_0 + \mathbb{E}(\beta^2) \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{2} = D_0 + (\mathbb{E}(\beta^2) - 1) \frac{\sigma^2}{2},$$

et :

$$\mathbb{E}(\beta^2) - 1 = \mathbb{E}(\beta^2) - \mathbb{E}(\beta)^2 = \text{Var}(\beta) = \mathbb{E}((\beta - \mathbb{E}(\beta))^2) = \int_0^\infty (\beta - 1)^2 \Pi(\beta) d\beta.$$

Alors on trouve notre nouvelle EDP dont on aura besoin dans la partie 3 du rapport :

$$\frac{\partial \hat{\rho}(y, t)}{\partial t} = \hat{D} \frac{\partial^2 \hat{\rho}(y, t)}{\partial y^2}, \quad (3)$$

avec :

$$\hat{D} = D_0 + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^\infty (\beta - 1)^2 \Pi(\beta) d\beta. \quad (4)$$

Ainsi, nous avons démontré le lien existant entre la diffusion et notre modèle financier. De plus, nous avons observé une relation entre \hat{D} et σ , qui se traduit par une proportionnalité lorsque le coefficient D_0 est nul.

2.3 Régime stationnaire du carnet d'ordres latent

Dans cette sous-section, nous analysons le comportement stationnaire du carnet d'ordres latent modélisé par une équation aux dérivées partielles. L'objectif est de comprendre, en l'absence d'interventions spécifiques telles que les méta-ordres, comment la différence des densités de probabilité pour les ordres acheteurs (ρ_A) et vendeurs (ρ_B) évolue dans le temps et atteint un état stationnaire.

Nous rappelons que les densités volumiques vérifient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_B(x,t)}{\partial t} = -V_t \frac{\partial \rho_B(x,t)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho_B(x,t)}{\partial x^2} - \nu \rho_B(x,t) + \lambda \Theta(p_t - x) - \kappa R_{AB}(x,t), \\ \frac{\partial \rho_A(x,t)}{\partial t} = -V_t \frac{\partial \rho_A(x,t)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho_A(x,t)}{\partial x^2} - \nu \rho_A(x,t) + \lambda \Theta(x - p_t) - \kappa R_{AB}(x,t), \end{cases}$$

et le prix p_t est caractérisé par la relation $\rho_A(p_t, t) = \rho_B(p_t, t)$.

Nous introduisons d'abord une fonction $\phi(x, t)$ pour représenter la différence :

$$\tilde{\phi}(x, t) = \rho_B(x, t) - \rho_A(x, t).$$

En soustrayant la première équation de la seconde dans le système (1), on obtient l'équation d'évolution que vérifie $\tilde{\phi}(x, t)$:

$$\frac{\partial \tilde{\phi}(x, t)}{\partial t} = -V_t \frac{\partial \tilde{\phi}(x, t)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \tilde{\phi}(x, t)}{\partial x^2} - \nu \tilde{\phi}(x, t) + \lambda (\Theta(p_t - x) - \Theta(x - p_t)).$$

Dans le modèle simple qu'on a considéré, on avait $\Theta(u > 0) = 1$ et $\Theta(u < 0) = 0$, donc :

$$\Theta(p_t - x) - \Theta(x - p_t) = \begin{cases} 1 & \text{si } p_t - x > 0 \\ -1 & \text{si } p_t - x < 0 \end{cases} = \text{sgn}(p_t - x),$$

ce qui donne :

$$\frac{\partial \tilde{\phi}(x, t)}{\partial t} = -V_t \frac{\partial \tilde{\phi}(x, t)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \tilde{\phi}(x, t)}{\partial x^2} - \nu \tilde{\phi}(x, t) + \lambda \text{sgn}(p_t - x). \quad (5)$$

Nous définissons le prix de référence $\hat{p}_t = \int_0^t V_s ds$, qui représente l'évolution du prix en l'absence de perturbations, telles que les méta-ordres. Afin de simplifier notre analyse, nous introduisons une nouvelle variable y par le changement de variable :

$$y := x - \hat{p}_t.$$

Ce changement de variable nous permet de travailler dans le référentiel du carnet d'ordres latent en recentrant la position x autour du mouvement du prix de référence \hat{p}_t . En termes de cette nouvelle variable y , la fonction $\tilde{\phi}$ devient ϕ , définie par $\phi(y, t) := \tilde{\phi}(x, t)$. En pratique, cela se traduit par $\phi(y, t) := \tilde{\phi}(y + \hat{p}_t, t)$, reflétant la dépendance de ϕ à la fois au décalage y et au prix de référence \hat{p}_t . Sous ce nouveau cadre, l'équation (5) se réécrit :

$$\frac{\partial \tilde{\phi}(y + \hat{p}(t), t)}{\partial t} = -V_t \frac{\partial \tilde{\phi}(y + \hat{p}(t), t)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \tilde{\phi}(y + \hat{p}(t), t)}{\partial x^2} - \nu \tilde{\phi}(y + \hat{p}(t), t) + \lambda \text{sgn}(p_t - \hat{p}(t) - y). \quad (6)$$

Suivant le même raisonnement de la partie précédente qui nous a permis d'obtenir les équations (3), (4), nous démontrons que :

$$\frac{\partial \phi(y, t)}{\partial t} = \hat{D} \frac{\partial^2 \phi(y, t)}{\partial x^2} - \nu \phi(y, t) + \lambda \text{sgn}(p_t - \hat{p}_t - y), \quad (7)$$

\hat{D} est le même coefficient de diffusion (4) qui dépend de la sensibilité des agents vis-à-vis des nouvelles reçues.

Si nous supposons, d'une part, que le prix réel p_t est initialement égal au prix de référence \hat{p}_t , c'est-à-dire $p_0 = \hat{p}_0$, et, d'autre part, que le marché est antisymétrique par rapport à \hat{p}_t à l'instant initial, ce qui implique que ϕ est impair par rapport à l'espace dans le référentiel du carnet d'ordres latent ($\phi(y, 0) = -\phi(-y, 0)$), alors ces deux hypothèses demeurent valides pour tout t . En d'autres termes, tout au long de l'évolution, le prix réel p_t continuera à suivre le mouvement de \hat{p}_t , de sorte que $p_t = \hat{p}_t$ pour tout $t > 0$. Cependant, nous ne démontrerons pas ce résultat dans ce rapport, car la démonstration est complexe.

Lorsqu'on atteint le régime stationnaire ($t \rightarrow \infty$), alors la dépendance en t disparaît asymptotiquement, ce qui signifie que la dérivée temporelle $\frac{\partial \phi(y, t)}{\partial t}$ s'annule. De plus, puisque $p_t = \hat{p}_t$ pour tout $t > 0$, il en découle en particulier que $\lim_{t \rightarrow \infty} p_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{p}_t$. Dans ce contexte, l'EDP (7) se simplifie pour devenir :

$$\hat{D} \frac{\partial^2 \phi(y)}{\partial y^2} - \nu \phi(y) + \lambda \operatorname{sgn}(-y) = 0. \quad (8)$$

La solution stationnaire $\phi_{st}(y)$ de (7) peut être obtenue par une intégration directe. En considérant $\operatorname{sgn}(-y)$, on peut résoudre pour les deux cas $y \leq 0$ et $y \geq 0$:

$$\begin{cases} \phi_{st}(y \leq 0) &= \frac{\lambda}{\nu} (1 - e^{\gamma y}), \\ \phi_{st}(y \geq 0) &= -\phi_{st}(-y), \end{cases}$$

avec $\gamma^2 = \frac{\nu}{\hat{D}}$. Ce paramètre γ , qui a la dimension de l'inverse d'un prix, est un indicateur de la portée des interactions entre ordres dans le carnet latent : un γ élevé reflète une dominance de l'effet de dissipation (ν) par rapport à la diffusion (\hat{D}). Nous avons tracé ϕ_{st} :

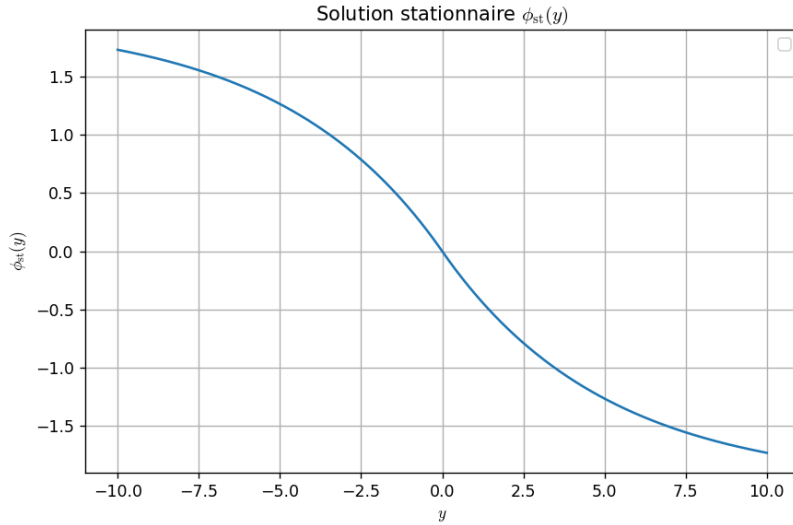


FIGURE 2 – ϕ_{st}

Cette forme stationnaire montre un comportement linéaire de ϕ_{st} proche du prix de transaction. Ce comportement reste valide pour une grande variété de modèles, y compris ceux avec des paramètres \hat{D} et ν dépendant de y . Ce résultat met en évidence la robustesse de la dynamique stationnaire du carnet d'ordres latent face à diverses hypothèses de modélisation, ce qui en fait un cadre général pour comprendre les interactions entre les ordres dans les marchés financiers.

3 Loi de racine de Q

3.1 Dynamique du prix pour un carnet d'ordre localement linéaire

Dans cette sous-section, nous analysons en détail le régime linéaire universel du carnet d'ordres latent (LLOB) ainsi que l'impact des méta-ordres sur la dynamique des prix. L'étude s'appuie sur une approche asymptotique en prenant la limite $\lambda \rightarrow 0$ et $\nu \rightarrow 0$, tout en maintenant une quantité échangée par unité de temps fixe. Cette méthodologie permet de mieux comprendre la dynamique du carnet d'ordres lorsque les ordres sont continus.

L'objectif principal de cette partie est, à partir du régime stationnaire obtenu dans la section précédente, d'introduire une perturbation sous forme de méta-ordre. Nous dériverons ensuite une équation aux dérivées partielles (EDP) qui gouverne la dynamique de l'impact des méta-ordres et démontrerons comment la liquidité latente joue un rôle crucial dans la propagation de cet impact. L'intégration de cette EDP permettra d'obtenir une solution analytique pour la fonction $\phi(y, t)$, ce qui nous fournira l'équation vérifiée par le prix recherché.

On rappelle qu'un meta-ordre est une opération d'achat ou de vente de grandes quantités d'un produit financier, mais qui est divisée en plusieurs sous-ordres. Cette fragmentation est souvent utilisée pour préserver de la confidentialité. En effet, en dissimulant la taille totale et l'intention derrière un méta-ordre, les investisseurs institutionnels ou les traders évitent d'attirer l'attention d'autres participants au marché. Cela réduit les risques dans lesquels d'autres traders prennent des positions pour profiter de l'impact attendu d'un grand ordre.

Nous allons commencer par définir quelques nouvelles notations que nous utiliserons par la suite. Tout d'abord, la grandeur J , définie par la relation suivante :

$$J := \hat{D} \left| \frac{\partial \phi_{st}(y)}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\lambda}{\gamma}. \quad (9)$$

Intuitivement, J représente la quantité d'ordres exécutés par unité de temps au niveau du prix p_t (donc $y = 0$), ce qui correspond au flux net d'ordres traversant cette position. Cela découle directement du fait que la loi de Fick :

$$\text{Flux} = -D\nabla\phi(y),$$

D est le coefficient de diffusion qui a la même interprétation que celle de notre modèle.

En régime stationnaire, dans la limite $\lambda \rightarrow 0$ et $\nu \rightarrow 0$

$$\phi_{st}(y \leq 0) = \frac{\lambda}{\nu}(1 - e^{-\gamma y}) \approx \frac{-\gamma\lambda}{\nu}y = \frac{-\gamma\lambda}{\gamma^2\hat{D}}y = \frac{-\lambda}{\gamma\hat{D}}y = \frac{-J}{\hat{D}}y = \phi_{st}(y \geq 0),$$

ce qui signifie que :

$$\phi_{st}(y) = -\frac{J}{\hat{D}}y. \quad (10)$$

Cela montre que la densité du carnet $\phi_{st}(y)$ décroît linéairement avec le prix y , soulignant l'importance de la diffusion \hat{D} dans la dissipation de l'impact des ordres.

Ensuite, nous introduisons la liquidité latente du marché \mathcal{L} . Elle mesure la quantité d'ordres latents présents dans une plage de prix donnée. \mathcal{L} est définie par :

$$\mathcal{L} := \left| \frac{\partial \phi_{st}(y)}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{J}{\hat{D}} = \lambda \sqrt{\frac{\hat{D}}{\nu}}. \quad (11)$$

On remarque que :

- Lorsque λ est élevé, l'apparition fréquente d'ordres latents favorise une liquidité abondante, rendant le marché plus résilient.
- Inversement, une faible valeur de ν , traduisant une fréquence d'annulation réduite, contribue également à une augmentation de la liquidité latente.

Pour modéliser l'impact d'un méta-ordre, on considère la dynamique de la variable $y_t = p_t - \hat{p}_t$, où p_t désigne le prix transactionnel et \hat{p}_t le prix de référence non impacté.

En régime non perturbé, lorsque $\lambda \rightarrow 0$ et $\nu \rightarrow 0$, l'équation gouvernant le carnet d'ordres s'écrit sous forme d'une équation de diffusion :

$$\frac{\partial \phi(y, t)}{\partial t} = \hat{D} \frac{\partial^2 \phi(y, t)}{\partial y^2}. \quad (12)$$

Cependant, lorsqu'un méta-ordre est initié à $t = 0$, une source ponctuelle apparaît dans l'équation, traduisant l'injection d'ordres à une position donnée du carnet :

$$\frac{\partial \phi(y, t)}{\partial t} = \hat{D} \frac{\partial^2 \phi(y, t)}{\partial y^2} + m_t \delta(y - y_t), \quad \frac{\partial \phi(y \rightarrow \pm\infty, t)}{\partial y} = -\mathcal{L}. \quad (13)$$

Ici, m_t représente l'intensité du méta-ordre à l'instant t , c'est-à-dire la quantité achetée ou vendue par unité de temps par notre méta-ordre. Un signe positif de m_t indique un ordre d'achat, tandis qu'un signe négatif indique un ordre de vente. Il est important de noter la distinction entre m_t et J : J représente la quantité totale échangée sur le marché en régime stationnaire, alors que m_t correspond uniquement à la quantité échangée en raison du méta-ordre, sans prendre en compte les autres transactions effectuées simultanément.

La condition aux limites $\frac{\partial \phi(y \rightarrow \pm\infty, t)}{\partial y} = -\mathcal{L}$ traduit l'idée qu'à grande distance, la dérivée de $\phi(y, t)$ est proportionnelle à la liquidité latente. Cette condition est essentielle pour garantir la décroissance linéaire de ϕ à l'infini, reflétant l'équilibre de long terme du carnet d'ordres.

L'intégration de cette équation permet d'obtenir une solution de ϕ sous la forme :

$$\phi(y, t) = -\mathcal{L}y + \int_0^t \frac{m_s}{\sqrt{4\pi\hat{D}(t-s)}} e^{-\frac{(y-y_s)^2}{4\hat{D}(t-s)}} ds, \quad (14)$$

où y_s est déterminé par la condition d'équilibre $\phi(y_s, s) = 0$.

Cette solution met en évidence la propagation de l'impact au fil du temps, avec une diffusion gaussienne dépendant du paramètre \hat{D} . La dynamique du prix y_t est alors décrite par l'équation intégrale suivante :

$$y_t = \frac{1}{\mathcal{L}} \int_0^t \frac{m_s}{\sqrt{4\pi\hat{D}(t-s)}} e^{-\frac{(y_t-y_s)^2}{4\hat{D}(t-s)}} ds. \quad (15)$$

Nous remarquons qu'une solution explicite du prix y_t n'a pas été obtenue, en raison de la présence des termes y_t et y_s dans l'intégrale. Cette forme nous conduit à une équation implicite en y_t , qui constitue une relation clé dans notre modèle. Elle sera utilisée tout au long de l'analyse et des développements suivants pour déterminer l'évolution du prix dans le cadre de notre processus.

3.2 Démonstration de la loi de racine de Q

Dans cette partie, nous allons analyser l'impact non linéaire d'un méta-ordre exécuté à taux constant sur la dynamique des prix. Nous présenterons une solution exacte pour le modèle considéré, puis nous étudierons ses approximations asymptotiques dans différents régimes.

Nous supposons dans cette partie que le méta-ordre est exécuté à taux constant, c'est-à-dire $m = Q/T$. Dans ce cas, une solution exacte de l'équation (9) est donnée par :

$$y_s = A\sqrt{\hat{D}s}, \quad (16)$$

avec A caractérisée implicitement comme suit :

$$A = \frac{m}{J} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4\pi(1-u)}} e^{-\frac{A^2(1-\sqrt{u})}{4(1+\sqrt{u})}} du. \quad (17)$$

En effet, si $y_s = A\sqrt{\hat{D}s}$, alors

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{1}{\mathcal{L}} \int_0^t \frac{m}{\sqrt{4\pi\hat{D}(t-s)}} e^{-\frac{(y_t-y_s)^2}{4\hat{D}(t-s)}} ds \\ &= \frac{1}{\mathcal{L}} \int_0^t \frac{m}{\sqrt{4\pi\hat{D}(t-s)}} e^{-\frac{(A\sqrt{\hat{D}t}-A\sqrt{\hat{D}s})^2}{4\hat{D}(t-s)}} ds \\ &= \frac{m}{\mathcal{L}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi\hat{D}t(1-\frac{s}{t})}} e^{-\frac{A^2\hat{D}t(1-\sqrt{\frac{s}{t}})^2}{4\hat{D}t(1-\frac{s}{t})}} ds \\ &= \frac{m}{\mathcal{L}\sqrt{\hat{D}}} \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{4\pi t(1-\sqrt{u})}} e^{-\frac{A^2(1-u)^2}{4(1-u)}} ds \\ &= \sqrt{\hat{D}t} \frac{m}{\mathcal{L}\hat{D}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4\pi(1-\sqrt{u})}} e^{-\frac{A^2(1-u)^2}{4(1-\sqrt{u})(1+\sqrt{u})}} ds \\ &= \sqrt{\hat{D}t} \frac{m}{J} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4\pi(1-u)}} e^{-\frac{A^2(1-\sqrt{u})}{4(1+\sqrt{u})}} ds \\ &= A\sqrt{\hat{D}t} \quad \text{avec} \quad A = \frac{m}{J} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4\pi(1-u)}} e^{-\frac{A^2(1-\sqrt{u})}{4(1+\sqrt{u})}} du. \end{aligned}$$

Ainsi, la cohérence de la solution est vérifiée.

On va démontrer que :

- Lorsque $m \ll J$, alors $A \approx \frac{m}{J\sqrt{\pi}}$.
- Lorsque $m \gg J$, alors $A \approx \sqrt{\frac{2m}{J}}$.

D'une part, si $m \ll J$, alors $-\frac{A^2(1-\sqrt{u})}{4(1+\sqrt{u})} \rightarrow 0$ car A devient très petite, donc $e^{-\frac{A^2(1-\sqrt{u})}{4(1+\sqrt{u})}} \approx 1$, d'où :

$$\begin{aligned} A &\approx \frac{m}{J} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4\pi(1-u)}} du \\ &= \frac{m}{J} \frac{2}{\sqrt{4\pi}} \\ &= \frac{m}{J\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

D'autre part, si $m \gg J$, alors $A \gg 1$. Par suite, la contribution de $e^{-\frac{A^2(1-\sqrt{u})}{4(1+\sqrt{u})}} \rightarrow 0$ sauf pour

$u \rightarrow 1$. Ainsi, on ne va s'intéresser qu'à $u \rightarrow 1$. Par suite :

$$\begin{aligned}
A &= \frac{m}{J} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4\pi(1-u)}} e^{-\frac{A^2(1-\sqrt{u})}{4(1+\sqrt{u})}} du \\
&= \frac{-m}{J} \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} e^{-\frac{A^2(1-\sqrt{1-\epsilon})}{4(1+\sqrt{1-\epsilon})}} d\epsilon \quad \text{changement de variable } \epsilon = 1 - u \\
&\approx \frac{m}{J} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} e^{-\frac{A^2(1-1+\frac{\epsilon}{2})}{4(1+1-\frac{\epsilon}{2})}} d\epsilon \quad \text{car } \sqrt{1-\epsilon} \approx 1 - \frac{\epsilon}{2} \\
&= \frac{m}{J} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} e^{-\frac{A^2\frac{\epsilon}{2}}{4(2-\frac{\epsilon}{2})}} d\epsilon \\
&= \frac{m}{J} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} e^{-\frac{A^2\frac{\epsilon}{2}}{8(1-\frac{\epsilon}{4})}} d\epsilon \\
&\approx \frac{m}{J} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} e^{-\frac{A^2\epsilon}{16}} d\epsilon \quad \text{car } \frac{A^2\frac{\epsilon}{2}}{8(1-\frac{\epsilon}{4})} \approx \frac{A^2\epsilon}{16}.
\end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} e^{-\frac{A^2\epsilon}{16}} \rightarrow 0$ pour tout ϵ qui ne tend pas vers 0, donc :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} e^{-\frac{A^2\epsilon}{16}} d\epsilon = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} e^{-\frac{A^2\epsilon}{16}} d\epsilon.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
A &\approx \frac{m}{\sqrt{4\pi}J} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\frac{A^2\epsilon}{16}} d\epsilon \\
&= \frac{m}{\sqrt{4\pi}J} \int_0^\infty \frac{A}{\sqrt{16v}} e^{-v} \frac{16}{A^2} dv \quad \text{changement de variable } v = \frac{A^2\epsilon}{16} \\
&= \frac{4m}{\sqrt{4\pi}JA} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{v}} e^{-v} dv.
\end{aligned}$$

En plus $\frac{4m}{\sqrt{4\pi}JA} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{v}} e^{-v} dv = \Gamma(1/2)$ où Γ est la fonction Gamma. On sait que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, donc :

$$\begin{aligned}
A &\approx \frac{2m}{\sqrt{\pi}JA} \sqrt{\pi} \\
&= \frac{2m}{JA}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$A^2 \approx \frac{2m}{J}.$$

Nous trouvons donc notre approximation :

$$A \approx \sqrt{\frac{2m}{J}}.$$

Le prix final après l'exécution du méta-ordre est donné par $y_T = A\sqrt{\hat{D}T}$. Ainsi, l'impact de marché $I(Q)$, défini comme la variation du prix due uniquement au méta-ordre, s'écrit :

$$I(Q) = y_T - y_0 = A\sqrt{\hat{D}T} = A\sqrt{\frac{\hat{D}Q}{m}}, \quad (18)$$

ce qui conduit à :

$$\begin{cases} I(Q) \approx \sqrt{\frac{m}{J\pi}} \sqrt{\frac{Q}{L}}, & \text{si } m \ll J, \\ I(Q) \approx \sqrt{\frac{2Q}{L}}, & \text{si } m \gg J. \end{cases} \quad (19)$$

Nous avons tracé $I(Q)$ dans les deux cas étudiés. Pour ce faire, nous avons d'abord résolu l'équation (17) à l'aide de la méthode du point fixe, puis superposé la solution exacte (18) avec les approximations (19). Il est important de noter que les courbes obtenues à partir des formes approximatives concordent remarquablement bien avec la solution exacte dans les deux configurations.

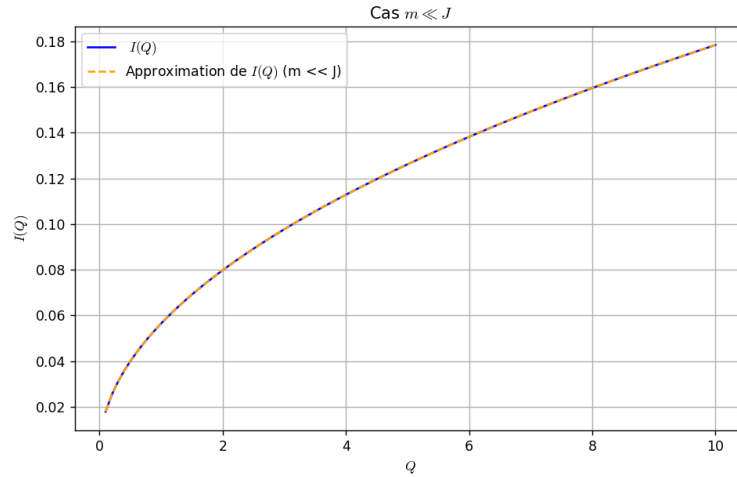


FIGURE 3 – $I(Q)$ $m \ll J$

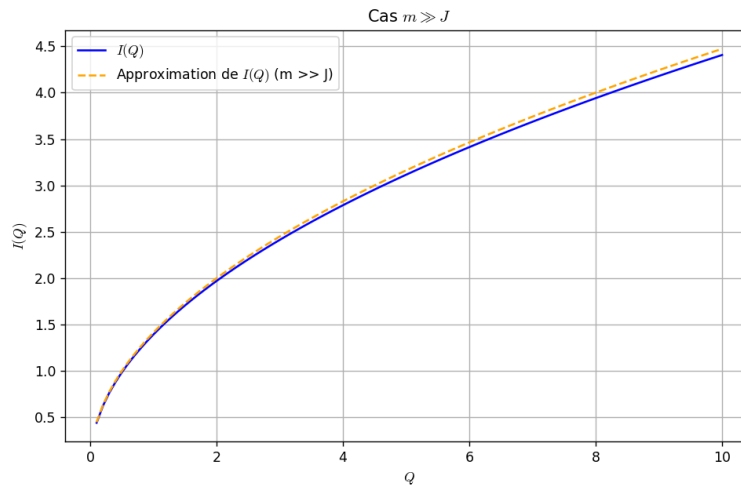


FIGURE 4 – $I(Q)$ $m \gg J$

La forme empirique de la loi d'impact est souvent écrite comme :

$$I(Q) = Y\sigma\sqrt{\frac{Q}{V}}, \quad (20)$$

où :

— σ est la volatilité quotidienne,

- $V = JT_d = DLT_d$ est le volume échangé quotidiennement ($T_d = 1$ jour),
- Y est une constante d'ordre 1.

En supposant que $\sigma^2 \propto DT_d$, ce qui est le cas si $D_0 = 0$ (voir 2.2.2), on retrouve la dépendance empirique avec Y proportionnel à $\sqrt{\frac{m}{J}}$ pour de faibles intensités de trading m , et indépendant de m pour de fortes intensités.

Ainsi, ce modèle théorique capture fidèlement la loi racine carrée observée empiriquement, reliant l'impact d'un méta-ordre à sa taille Q de manière quantitative et qualitative.

4 Comparaison des modèles d'impact de marché sur des données simulées

Dans cette section, nous nous intéressons à la comparaison de différents modèles pour évaluer l'impact de marché. Nous présentons d'abord les données simulées utilisées pour nos analyses, puis détaillons les hypothèses et formulations des modèles étudiés. Enfin, nous comparons leurs performances à l'aide du critère d'information d'Akaike (AIC) pour en tirer des conclusions sur leur pertinence respective.

Avant d'entreprendre cette comparaison, nous avons exploré empiriquement la loi de \sqrt{Q} à l'aide de données réelles. Pour cela, nous avons recherché des sources de données gratuites et opté pour Binance, une plateforme de trading de cryptomonnaies. Les données disponibles varient en fonction du type de cryptomonnaie échangé et de l'intervalle de temps choisi entre chaque point de données. Voici un exemple de structure des données obtenues :

```

149904000000, // Instant d'ouverture
"0.01634790", // Prix d'ouverture
"0.80000000", // Prix le plus haut
"0.01575800", // Prix le plus bas
"0.01577100", // Prix de clôture
"148976.11427815", // Volume
1499644799999, // Instant de clôture
"2434.19055334", // Volume en devise cotée
308, // Nombre de transactions
"1756.87402397", // Volume acheté par les preneurs en actif de base
"28.46694368", // Volume acheté par les preneurs en devise cotée
"0" // Champ inutilisé, à ignorer

```

Cependant, nous avons rencontré des difficultés à confirmer si nos transactions correspondaient vraiment à des méta-ordres. Les méta-ordres se caractérisent par le fait qu'une seule entité achète ou vend un même produit en grande quantité, ces transactions étant fragmentées en plusieurs sous-ordres exécutés sur une longue durée. Or, nous ne disposons d'aucune information sur l'identité des acheteurs ou vendeurs, ce qui nous empêche de déterminer si une même partie a effectué un grand nombre de transactions dans nos données. Par conséquent, il est impossible de savoir si ces ordres représentent effectivement un méta-ordre.

Une autre difficulté rencontrée par toute personne souhaitant étudier empiriquement la loi de \sqrt{Q} réside dans l'observation pratique de l'impact de marché. Dans notre modèle, nous avons trouvé que l'impact de marché, $\mathcal{I}(Q) = p_t - \hat{p}_t$, suit la loi de \sqrt{Q} . Cependant, les opérateurs de marché ne peuvent pas observer directement \hat{p}_t , le prix de référence non perturbé. Ils ne disposent que de la variation du prix transactionnel p_t , c'est-à-dire qu'ils observent $\mathcal{I}(Q) + \hat{p}_t$. Dans ce contexte, \hat{p}_t agit comme un bruit dans notre modèle. Cette impossibilité d'isoler l'impact lié au méta-ordre rend beaucoup plus difficile la vérification empirique de la loi de \sqrt{Q} , car le bruit s'ajoute à l'observation. Ces limitations nous ont conduit à abandonner cette approche. Nous avons donc choisi de nous concentrer sur une analyse plus contrôlée en utilisant des données

simulées.

Nous avons généré des données basées sur la deuxième équation de (19), à savoir $I(Q) = \sqrt{\frac{2Q}{\mathcal{L}}}$. Nous aurions préféré simuler nos données à partir de paramètres observables du marché. Toutefois, la liquidité (\mathcal{L}) étant un paramètre non observable, nous avons reformulé notre modèle comme suit :

$$I(Q) = \sqrt{\frac{2Q}{\mathcal{L}}} = \sqrt{\frac{2QT_d}{\mathcal{L}T_d}} = \sqrt{\frac{2Q\hat{D}T_d}{JT_d}} = \sqrt{\frac{2Q\hat{D}T_d}{V}},$$

où $V = JT_d$ représente le volume échangé quotidiennement sur le marché, et T_d correspond à une journée. Comme vu dans la section 2.2.2, \hat{D} peut être proportionnel à la volatilité du marché σ^2 . Notons le coefficient de proportionnalité α , ce qui donne $\hat{D} = \alpha\sigma^2$. En conséquence, nous obtenons :

$$I(Q) = \sqrt{2\alpha}\sigma\sqrt{\frac{Q}{V}}.$$

Pour effectuer nos simulations, nous avons généré aléatoirement les paramètres explicatives qui sont observables dans le marché : Q , V , σ , α ainsi que la durée d'exécution des sous-ordres T . Par ailleurs, nous avons ajouté le bruit \hat{p}_t , modélisé comme un bruit gaussien proportionnel, $\mathcal{N}(0, \sigma^2T)$. Ainsi, nos observations finales s'écrivent :

$$Y_{obs} = \sqrt{2\alpha}\sigma\sqrt{\frac{Q}{V}} + \mathcal{N}(0, \sigma^2T). \quad (21)$$

Ensuite, en se basant sur ces observations, nous allons comparer plusieurs modèles en utilisant le critère d'AIC. Ce critère permet de comparer la qualité de différents modèles statistiques tout en pénalisant les modèles comportant un grand nombre de paramètres, afin de favoriser ceux qui offrent un bon compromis entre précision et complexité.

Nous allons d'abord montrer comment calculer ce critère pour deux modèles donnés M et M' , que nous utiliserons par la suite. La première étape consiste à calculer la vraisemblance de ces modèles sur nos données simulées. Cela implique d'évaluer les densités de probabilités des observations $Y_{obs,i}$ et $Y_{obs',i}$, supposées indépendantes et identiquement distribuées selon les lois définies par les modèles. Supposons que nous disposons de N observations, et que les valeurs prédites par les deux modèles (hors bruit) sont notées $Y_{model,i}$ et $Y_{model',i}$, respectivement. Les deux modèles sont définis comme suit :

$$M : Y = Y_{model} + \mathcal{N}(0, \sigma^2T), \quad M' : Y' = Y_{model'} + \text{Student}(\nu),$$

où $\text{Student}(\nu)$ désigne une loi de Student avec ν degrés de liberté.

D'une part, nous avons $Y \sim \mathcal{N}(Y_{model}, \sigma^2T)$. Cela signifie que chaque observation suit une distribution normale centrée sur la prédiction du modèle $Y_{model,i}$, avec une variance $\sigma_i^2T_i$. Il est important de noter que σ n'est pas un paramètre à estimer, mais fait partie des données explicatives, comme mentionné précédemment.

D'autre part, $Y' \sim Y_{model'} + \text{Student}(\nu)$. Cela signifie que Y' suit une loi de Student centrée autour de $Y_{model'}$. Notons que le degré de liberté ν n'est pas non plus un paramètre à estimer, mais fait partie des données, et peut changer d'une observation à l'autre.

La fonction de vraisemblance pour le modèle M est donnée par :

$$\mathcal{L}(M) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi T_i \sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{(Y_{obs,i} - Y_{model,i})^2}{2\sigma_i^2 T_i}\right),$$

et la fonction de vraisemblance pour le modèle M' est donnée par :

$$\mathcal{L}(M') = \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{(Y_{obs',i} - Y_{model',i})^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}},$$

où Γ désigne la fonction Gamma.

Pour faciliter les calculs, on travaille souvent avec le logarithme de la vraisemblance (ou log-vraisemblance), qui s'écrit pour le modèle M :

$$\ln(\mathcal{L}(M)) = C - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \ln(\sigma_i^2 T_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(Y_{\text{obs},i} - Y_{\text{model},i})^2}{\sigma_i^2 T_i},$$

et pour le modèle M' :

$$\ln(\mathcal{L}(M')) = C' - \frac{\nu + 1}{2} \sum_{i=1}^N \ln \left(1 + \frac{(Y_{\text{obs}',i} - Y_{\text{model}',i})^2}{\nu} \right),$$

où C et C' sont des constantes additives provenant des termes constants des densités de probabilité. Comme la log-vraisemblance n'est définie qu'à une constante additive près, il n'est pas nécessaire de connaître la valeur exacte de ces constantes pour comparer les modèles ; nous les ignorons donc dans la suite. Ainsi, le but est de chercher les paramètres des modèles qui maximisent la log-vraisemblance, et donc qui minimisent :

$$-\ln(\mathcal{L}(M)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \ln(\sigma_i^2 T_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(Y_{\text{obs},i} - Y_{\text{model},i})^2}{\sigma_i^2 T_i}, \quad (22)$$

et

$$-\ln(\mathcal{L}(M')) = \sum_{i=1}^N \frac{\nu_i + 1}{2} \ln \left(1 + \frac{(Y_{\text{obs}',i} - Y_{\text{model}',i})^2}{\nu} \right), \quad (23)$$

L'étape suivante consiste à utiliser la log-vraisemblance minimale pour calculer le critère AIC, qui s'exprime comme :

$$\text{AIC} = 2k - 2 \ln(\mathcal{L}),$$

où k représente le nombre de paramètres estimés dans le modèle. Ce critère permet de déterminer quel modèle offre le meilleur compromis entre la qualité de l'ajustement et la simplicité.

Nous allons maintenant étudier six modèles, définis comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 : Y_1 = A_1 \sigma \sqrt{\frac{Q}{V}} + \mathcal{N}(0, \sigma^2 T), \\ M_2 : Y_2 = A_2 \sigma \frac{Q}{V\sqrt{T}} + \mathcal{N}(0, \sigma^2 T), \\ M_3 : Y_3 = A_3 \sigma \sqrt{\frac{Q}{V}} + \mathcal{N}(0, \tau_3 \sigma^2 T), \\ M_4 : Y_4 = A_4 \sigma \frac{Q}{V\sqrt{T}} + \mathcal{N}(0, \tau_4 \sigma^2 T), \\ M_5 : Y_5 = A_5 \sigma \sqrt{\frac{Q}{V}} + \mathcal{N}(0, \tau_5), \\ M_6 : Y_6 = A_6 \sigma \sqrt{\frac{Q}{V}} + \text{Student} \left(\frac{2\sigma^2 T}{\sigma^2 T - 1} \right), \end{array} \right.$$

où chaque modèle est caractérisé par un type de prédiction et une structure de bruit spécifiques.

Le modèle M_1 est basé sur une relation entre la racine carrée de Q et une constante multiplicative A_1 , qui est l'unique paramètre à estimer. Le modèle M_2 , en revanche, suppose une relation linéaire en Q , et le seul paramètre à estimer est la constante A_2 . Dans ces deux modèles, le bruit suit une distribution normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2 T)$, avec une variance dépendant des termes σ^2 et T . Cette variance varie donc pour chaque observation, ce qui rend M_1 et M_2 hétéroscédastiques.

Les modèles M_3 et M_4 reprennent respectivement les prédictions (hors bruit) des modèles M_1 et M_2 . Toutefois, leur bruit est multiplié par un paramètre additionnel τ_3 pour M_3 et τ_4 pour M_4 . Ces paramètres offrent une flexibilité supplémentaire pour adapter la variance du bruit à différentes situations. Comme pour M_1 et M_2 , les modèles M_3 et M_4 restent hétéroscédastiques,

car la variance dépend des termes $\sigma^2 T$. Ainsi, M_3 et M_4 ont chacun deux paramètres à estimer : la constante A_3 ou A_4 , et le paramètre de variance τ_3 ou τ_4 .

Contrairement aux modèles précédents, M_5 est conçu comme un modèle homoscédastique, c'est-à-dire que la variance du bruit est constante pour toutes les observations. Les valeurs prédites par M_5 suivent une relation de la forme $A_5 \sigma \sqrt{\frac{Q_i}{V_i}}$, mais le bruit est caractérisé par une variance indépendante τ_5 , qui ne dépend ni de σ^2 ni de T . Le modèle M_5 possède donc deux paramètres à estimer : la constante A_5 et le terme de variance τ_5 .

Le modèle M_6 se distingue des cinq premiers par la nature du bruit. Contrairement aux modèles précédents, où le bruit suit une loi normale, M_6 introduit un bruit issu d'une loi de Student avec un degré de liberté ν choisi pour ne pas coller parfaitement aux données simulées. L'objectif ici est de tester une hypothèse alternative, où la distribution du bruit diffère de celle des données de départ. La loi de Student permet notamment de capturer des événements extrêmes plus fréquents grâce à ses queues épaisses.

Le degré de liberté ν est spécifiquement ajusté pour que la variance de la loi de Student corresponde à la variance des données simulées, soit $\sigma^2 T$. On sait que pour une loi de Student, la relation entre la variance Var et le degré de liberté ν est donnée par :

$$\text{Var} = \frac{\nu}{\nu - 2}.$$

En inversant cette relation, on obtient :

$$\nu = \frac{2 \text{Var}}{\text{Var} - 1}.$$

En remplaçant Var par $\sigma^2 T$, on déduit que :

$$\nu = \frac{2\sigma^2 T}{\sigma^2 T - 1}.$$

Ainsi, M_6 est construit pour explorer une configuration où le bruit a une distribution différente, tout en respectant la variance observée dans les données.

Dans la suite, nous évaluerons ces six modèles à l'aide du critère d'AIC, afin de déterminer celui qui offre le meilleur compromis entre qualité de l'ajustement et pertinence théorique.

D'après les équations (22) et (23), nous devons chercher les paramètres A_1^* , A_2^* , A_3^* , τ_3^* , A_4^* , τ_4^* , A_5^* , τ_5^* et A_6^* qui permettent de minimiser les quantités :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \ln(\sigma_i^2 T_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(Y_{\text{obs},i} - A_1^* \sigma_i \sqrt{\frac{Q_i}{V_i}})^2}{\sigma_i^2 T_i}, \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \ln(\sigma_i^2 T_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(Y_{\text{obs},i} - A_2^* \sigma_i \frac{Q_i}{V_i \sqrt{T_i}})^2}{\sigma_i^2 T_i}, \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \ln(\tau_3^* \sigma_i^2 T_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(Y_{\text{obs},i} - A_3^* \sigma_i \sqrt{\frac{Q_i}{V_i}})^2}{\tau_3^* \sigma_i^2 T_i}, \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \ln(\tau_4^* \sigma_i^2 T_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(Y_{\text{obs},i} - A_4^* \sigma_i \frac{Q_i}{V_i \sqrt{T_i}})^2}{\tau_4^* \sigma_i^2 T_i}, \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \ln(\tau_5^*) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(Y_{\text{obs},i} - A_5^* \sigma_i \sqrt{\frac{Q_i}{V_i}})^2}{\tau_5^*}, \\ \sum_{i=1}^N \frac{3\sigma_i^2 T_i - 1}{2} \ln \left(1 + \frac{(Y_{\text{obs},i} - A_6^* \sigma_i \sqrt{\frac{Q_i}{V_i}})^2}{\frac{2\sigma^2 T}{\sigma^2 T - 1}} \right) \end{array} \right. \quad (24)$$

En ce qui concerne le code Python qui nous permet de calculer l’AIC, nous avons commencé par générer le jeu de données simulées. Ces données sont créées aléatoirement en utilisant des distributions uniformes. Plus précisément, nous générons $N = 1000$ points pour chacune des variables. La variable Q , qui représente la quantité échangée par le méta-ordre, est générée dans l’intervalle $[100, 1000]$. La variable V , correspondant au volume échangé quotidiennement sur le marché, est tirée dans $[5, 15]$. De même, la durée T du méta-ordre est tirée dans $[1, 10]$. Enfin, les paramètres α et σ , qui représentent respectivement le facteur de proportionnalité et la volatilité du marché, sont générés dans les intervalles $[0.25, 0.3]$ et $[0.01, 0.1]$. Les observations Y_{obs} sont ensuite calculées selon la formule (21).

Nous définissons ensuite les six modèles $M1$ à $M6$, en précisant leurs fonctions de log-vraisemblance. Ces dernières suivent la structure générale donnée par la formule (24), à l’exception de deux ajustements importants. Pour le modèle $M5$, afin d’éviter la division par zéro, nous utilisons $\max(\tau_5^*, 10^{-6})$ au lieu de τ_5^* . De même, pour $M6$, nous remplaçons le terme du dénominateur à l’intérieur du \ln par $2\sigma^2 T / \max(\sigma^2 T - 1, 10^{-6})$, garantissant ainsi une stabilité numérique.

Pour ajuster ces modèles, nous utilisons la fonction `minimize` de la bibliothèque SciPy. Cette fonction trouve les valeurs optimales des paramètres en minimisant l’opposé des log-vraisemblances. Des bornes sont également imposées sur les paramètres pour garantir leur validité physique, ils doivent être tous positives, voir strictement positives comme le cas de τ_5 . Une fois les modèles ajustés, nous calculons leur log-vraisemblance maximale ainsi que leur critère AIC. Ce dernier permet de comparer les modèles en prenant en compte à la fois leur capacité à ajuster les données et leur complexité. En pratique, un modèle avec un AIC plus faible est préféré, car il représente un bon compromis entre simplicité et qualité d’ajustement. Enfin, nous affichons les résultats obtenus, notamment les log-vraisemblances et les AIC pour chaque modèle :

```

Log-vraisemblance pour M1 : 1773.529741630232
AIC pour M1 : -3545.059483260464
Log-vraisemblance pour M2 : 1246.012743307212
AIC pour M2 : -2490.0254866145424
Log-vraisemblance pour M3 : 1773.533775264094
AIC pour M3 : -3543.067550528188
Log-vraisemblance pour M4 : 1414.416971361407
AIC pour M4 : -2824.833942722814
Log-vraisemblance pour M5 : 1421.2366661993174
AIC pour M5 : -2838.4733323986347
Log-vraisemblance pour M6 : -10.720496803562789
AIC pour M6 : 23.440993607125577

```

FIGURE 5 – AIC des modèles

Nous constatons que le modèle M_1 présente le meilleur AIC, c’est-à-dire l’AIC le plus faible parmi tous les modèles comparés. Cela indique que M_1 est le modèle qui s’ajuste le mieux aux données simulées. Ce résultat était attendu, car M_1 a été construit en cohérence avec la génération des données : il prédit une relation en \sqrt{Q} , et le bruit est identique à celui des données, avec la même variance.

Le modèle M_3 s’ajuste également très bien aux données, et il est important de noter que sa log-vraisemblance est supérieure à celle de M_1 . Cette supériorité est attendue, car M_3 inclut un paramètre supplémentaire (τ_3), qui offre une flexibilité accrue et permet un meilleur ajustement aux données. Toutefois, cette flexibilité supplémentaire est pénalisée par le critère AIC, qui tient compte de la complexité du modèle. La différence d’AIC entre M_1 et M_3 est de 1,99, ce qui indique que les deux modèles sont très proches en termes de qualité d’ajustement, avec une légère préférence pour M_1 en raison de sa simplicité. L’ajout du paramètre τ_3 dans M_3 semble donc inutile dans ce contexte.

En comparant les modèles qui prédisent une relation en \sqrt{Q} (comme M_1 et M_3) avec ceux

qui prédisent une relation linéaire en Q (comme M_2 et M_4), nous observons des différences d'AIC significatives. Par exemple, la différence d'AIC entre M_1 et M_2 est de 1055,03 en faveur de M_1 , et celle entre M_3 et M_4 est de 718,23 en faveur de M_3 . Ces résultats confirment que les modèles basés sur une relation en \sqrt{Q} s'ajustent beaucoup mieux aux données simulées, ce qui était également attendu puisque les données suivent une relation en \sqrt{Q} .

Nous pouvons également comparer le modèle homoscédastique M_5 , qui prédit une relation en \sqrt{Q} , avec les modèles hétéroscédastiques M_1 et M_3 . Les données ayant été générées de manière hétéroscédastique, il est logique que M_1 et M_3 offrent de meilleurs ajustements. Cela est confirmé par les différences d'AIC de 706,58 (entre M_3 et M_5) et 704,59 (entre M_1 et M_5), qui montrent une nette supériorité des modèles hétéroscédastiques.

Enfin, le modèle M_6 présente l'AIC le plus élevé, ce qui en fait le modèle le moins performant vis-à-vis des données. La raison principale de ce résultat est la différence de nature du bruit : alors que le bruit des données simulées suit une loi normale, le bruit dans M_6 suit une loi de Student. Bien que la variance soit correcte, cette différence de distribution explique l'ajustement sous-optimal de M_6 .

En conclusion, les modèles M_1 et M_3 présentent des performances presque similaires et sont les mieux adaptés aux données simulées. Les modèles M_2 , M_4 et M_5 sont moins performants car ils reposent sur des hypothèses différant de celles des données simulées. Enfin, le modèle M_6 est le moins adapté en raison de la nature incorrecte du bruit modélisé.

5 Conclusion

Ce projet a permis d'explorer l'impact des méta-ordres sur les marchés financiers à travers une modélisation rigoureuse basée sur les équations aux dérivées partielles du carnet d'ordres latent. Nous avons confirmé que l'impact des méta-ordres suit une loi en racine carrée de la quantité échangée (\sqrt{Q}), un résultat robuste qui s'applique à divers types de marchés et périodes. Cette compréhension constitue une base solide pour optimiser les stratégies d'exécution et mieux comprendre la formation des prix.

Pour aller plus loin, nous pourrions approfondir l'étude des phénomènes qui se produisent après l'exécution d'un méta-ordre, notamment la manière dont l'impact décroît avec le temps. Cette relaxation, influencée par des facteurs tels que les asymétries dans le carnet d'ordres et les réactions des autres participants, offre des perspectives intéressantes pour analyser les coûts associés à des stratégies d'exécution inversées.

Une autre piste de recherche consisterait à examiner comment les prix sont influencés par les ordres en fonction de leur taille et de leur rythme d'exécution. Dans certains cas, l'impact semble indépendant du rythme et ne dépend que du volume total échangé, ce qui soulève des questions importantes pour l'optimisation des stratégies d'exécution.

Enfin, nous pourrions étudier les phénomènes à plus long terme, tels que l'effet persistant des ordres sur les prix. Ces investigations permettraient de mieux comprendre comment les ordres influencent les anticipations des participants au marché et comment ces interactions modifient la dynamique globale des prix. Une telle analyse pourrait également contribuer à l'amélioration des outils de gestion des risques et des stratégies de trading.

A Annexe : Démonstration probabiliste de la diffusion

Équivalence entre Réactions Différenciées et Mouvements Idiosyncratiques

Dans cette étude, nous analysons deux modèles distincts (A et B) décrivant l'évolution des prix de réservation d'un ensemble de tradeurs au cours du temps. Ces modèles reposent sur des hypothèses probabilistes et des dynamiques stochastiques afin de capturer l'impact des informations reçues et des ajustements individuels des tradeurs sur les variations de prix. Cette étude va nous permettre de montrer une équivalence qualitative entre réactions différenciées aux informations et mouvements idiosyncratiques dans l'évolution des prix de Réservation.

Modèle A

Dans le modèle A , à chaque pas de temps n , l'ensemble des informations reçues fait évoluer le prix de réservation de tous les tradeurs d'une même variable aléatoire X_n . On suppose que les X_n sont indépendantes, de même loi, $\mathbb{E}(X_n) = 0$, $\text{Var}(X_n) = \sigma_X^2$, et d'intégrabilité L^2 . En supplément de cela, sur chaque pas de temps, chaque tradeur i ajuste indépendamment son prix de réservation d'une variable aléatoire $Y_{i,n}$, où les $Y_{i,n}$ sont également supposés indépendants entre eux (et aussi indépendants des X_n), d'intégrabilité L^2 , tous de même loi et $\mathbb{E}(Y_{i,n}) = 0$, $\text{Var}(Y_{i,n}) = \sigma_Y^2$.

La variation du prix de réservation d'un tradeur i entre l'instant 0 et N (notre instant final) est donnée par :

$$\Delta_{i,N} = \sum_{n=1}^N (X_n + Y_{i,n}).$$

Nous cherchons à étudier la distribution limite de $\Delta_{i,N}/\sqrt{N}$ pour $N \rightarrow \infty$ pour tout ensemble de k tradeurs $\{i_0, i_1, \dots, i_{k-1}\}$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $0 \leq n \leq N$, on note :

$$Z_n = \begin{pmatrix} X_n + Y_{i_0,n} \\ X_n + Y_{i_1,n} \\ \vdots \\ X_n + Y_{i_{k-1},n} \end{pmatrix}$$

Puisque les $(X_n)_{1 \leq n \leq N}$ et les $(Y_{i,n})_{1 \leq n \leq N}$ pour $0 \leq i \leq k-1$ indépendantes identiquement distribuées, alors les $(Z_n)_{1 \leq n \leq N}$ sont aussi indépendantes identiquement distribuées. En plus, on a pour tout $1 \leq n \leq N$:

$$\mathbb{E}(Z_n) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_n + Y_{i_0,n}) \\ \mathbb{E}(X_n + Y_{i_1,n}) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(X_n + Y_{i_{k-1},n}) \end{pmatrix} = 0,$$

car $\mathbb{E}(X_n) = 0$ et $\mathbb{E}(Y_{i_j,n}) = 0$ pour tout $0 \leq j \leq k-1$, et en notant $Z_{n,i}$ l'élément i du vecteur Z_n , on a pour $0 \leq h, l \leq k-1$:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z_{n,h}, Z_{n,l}) &= \text{Cov}(X_n + Y_{i_h,n}, X_n + Y_{i_l,n}) \\ &= \text{Cov}(X_n, X_n) + \text{Cov}(X_n, Y_{i_l,n}) + \text{Cov}(Y_{i_h,n}, X_n) + \text{Cov}(Y_{i_h,n}, Y_{i_l,n}) \\ &= \begin{cases} \sigma_X^2 + \sigma_Y^2, & \text{si } h = l, \\ \sigma_X^2, & \text{si } h \neq l, \end{cases} \end{aligned}$$

car $\text{Cov}(X_n, X_n) = \text{Var}(X_n) = \sigma_X^2$, $\text{Cov}(X_n, Y_{i,n}) = 0$ par indépendance de $Y_{i,n}$ et X_n et si $h = l$ alors $\text{Cov}(Y_{i,n}, Y_{i,n}) = \text{Var}(Y_{i,n}) = \sigma_Y^2$ et si $h \neq l$ alors $\text{Cov}(Y_{i,n}, Y_{i,n}) = 0$ car $Y_{i,n}$ et $Y_{i,n}$ sont indépendantes. Donc la matrice de variance covariance de Z_n est :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 & \sigma_X^2 & \cdots & \sigma_X^2 \\ \sigma_X^2 & \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 & \cdots & \sigma_X^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_X^2 & \sigma_X^2 & \cdots & \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$$

Par le théorème-limite central,

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{n=1}^N Z_n - N\mathbb{E}(Z_1) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma).$$

Par suite on a montrer que le vecteur $(\Delta_{i,j,N}/\sqrt{N})_{0 \leq j \leq k-1}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \Gamma)$.

Modèle B

Dans le modèle B , à chaque pas de temps n , il y a une suite de variables aléatoires X_n , les $(X_n)_{1 \leq n \leq N}$ sont indépendantes entre eux, $\mathbb{E}(X_n) = 0$, d'intégrabilité L^2 , de même loi, $\mathbb{E}(X_n) = 0$ et $\text{Var}(X_n) = \sigma_X^2$, cette variable aléatoire décrit les informations reçues. L'évolution du prix de réservation du tradeur i est donnée par le produit $R_{i,n}X_n$, où les $R_{i,n}$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, indépendantes des X_n , positives, d'intégrabilité L^2 . On note $\mathbb{E}(R_{i,n}) = \mu_R$ et $\text{Var}(R_{i,n}) = \sigma_R^2$.

La variation du prix de réservation d'un tradeur i entre l'instant 0 et N est donnée par :

$$\Delta_{i,N} = \sum_{n=1}^N R_{i,n}X_n.$$

Nous cherchons à étudier la distribution limite de $\Delta_{i,N}/\sqrt{N}$ pour $N \rightarrow \infty$ pour tout ensemble de k tradeurs $\{i_0, i_1, \dots, i_{k-1}\}$. On procède de la même manière.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $1 \leq n \leq N$, on note :

$$Z_n = \begin{pmatrix} R_{i_0,n}X_n \\ R_{i_1,n}X_n \\ \vdots \\ R_{i_{k-1},n}X_n \end{pmatrix}$$

Puisque les $(X_n)_{1 \leq n \leq N}$ et les $(R_{i,n})_{1 \leq n \leq N}$ pour $0 \leq i \leq k-1$ indépendantes identiquement distribuées, alors les $(Z_n)_{1 \leq n \leq N}$ sont aussi indépendantes identiquement distribuées. En plus, on a pour tout $1 \leq n \leq N$:

$$\mathbb{E}(Z_n) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(R_{i_0,n}X_n) \\ \mathbb{E}(R_{i_1,n}X_n) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(R_{i_{k-1},n}X_n) \end{pmatrix} = 0,$$

car par indépendance de $R_{i,n}$ avec X_n , et comme X_n est centrée, alors $\mathbb{E}(R_{i,n}X_n) = \mathbb{E}(R_{i,n})\mathbb{E}(X_n) =$

0, et en notant $Z_{n,i}$ l'élément i du vecteur Z_n , on a pour $0 \leq h, l \leq k-1$:

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(Z_{n,h}, Z_{n,l}) &= \text{Cov}(R_{i_h,n}X_n, R_{i_l,n}X_n) \\
&= \mathbb{E}(R_{i_h,n}X_n R_{i_l,n}X_n) - \mathbb{E}(R_{i_h,n}X_n)\mathbb{E}(R_{i_l,n}X_n) \\
&= \mathbb{E}(X_n^2)\mathbb{E}(R_{i_h,n}R_{i_l,n}) \\
&= \begin{cases} \text{Var}(X_n)\mathbb{E}(R_{i_h,n}^2) & \text{si } h = l, \\ \text{Var}(X_n)\mathbb{E}(R_{i_h,n})\mathbb{E}(R_{i_l,n}), & \text{si } h \neq l, \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sigma_X^2(\text{Var}(R_{i_h,n}) + \mathbb{E}(R_{i_h,n})^2), & \text{si } h = l, \\ \sigma_X^2\mu_R^2, & \text{si } h \neq l, \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sigma_X^2\sigma_R^2 + \sigma_X^2\mu_R^2, & \text{si } h = l, \\ \sigma_X^2\mu_R^2, & \text{si } h \neq l, \end{cases}
\end{aligned}$$

La matrice de variance covariance de Z_n est :

$$\tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2\sigma_R^2 + \sigma_X^2\mu_R^2 & \sigma_X^2\mu_R^2 & \cdots & \sigma_X^2\mu_R^2 \\ \sigma_X^2\mu_R^2 & \sigma_X^2\sigma_R^2 + \sigma_X^2\mu_R^2 & \cdots & \sigma_X^2\mu_R^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_X^2\mu_R^2 & \sigma_X^2\mu_R^2 & \cdots & \sigma_X^2\sigma_R^2 + \sigma_X^2\mu_R^2 \end{pmatrix}$$

Par le théorème central limite,

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{n=1}^N Z_n - N\mathbb{E}(Z_1) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma).$$

Par suite on a montrer que le vecteur $(\Delta_{i_j,N}/\sqrt{N})_{0 \leq j \leq k-1}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \tilde{\Gamma})$.

Comparaison entre les modèles A et B

Les modèles A et B présentent un comportement identique à l'échelle macroscopique. En effet, lorsque $N \rightarrow \infty$, pour tout ensemble de k traders $\{i_0, i_1, \dots, i_{k-1}\}$, le vecteur des k -uplets $(\Delta_{i,N}/\sqrt{N})$ des deux modèles converge respectivement vers des lois normales :

- Pour le modèle A , la distribution limite est $\mathcal{N}(0, \Gamma_{X,Y})$. - Pour le modèle B , elle est $\mathcal{N}(0, \tilde{\Gamma}_{X',R})$.

Les matrices de covariance $\Gamma_{X,Y}$ et $\tilde{\Gamma}_{X',R}$ associées à ces lois sont données par :

$$\Gamma_{X,Y} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 & \sigma_X^2 & \cdots & \sigma_X^2 \\ \sigma_X^2 & \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 & \cdots & \sigma_X^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_X^2 & \sigma_X^2 & \cdots & \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \end{pmatrix},$$

et

$$\tilde{\Gamma}_{X',R} = \begin{pmatrix} \sigma_{X'}^2\sigma_R^2 + \sigma_{X'}^2\mu_R^2 & \sigma_{X'}^2\mu_R^2 & \cdots & \sigma_{X'}^2\mu_R^2 \\ \sigma_{X'}^2\mu_R^2 & \sigma_{X'}^2\sigma_R^2 + \sigma_{X'}^2\mu_R^2 & \cdots & \sigma_{X'}^2\mu_R^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{X'}^2\mu_R^2 & \sigma_{X'}^2\mu_R^2 & \cdots & \sigma_{X'}^2\sigma_R^2 + \sigma_{X'}^2\mu_R^2 \end{pmatrix}.$$

Pour mieux comprendre cette équivalence, observons la structure générale des matrices de covariance :

— Pour le modèle A , l'ensemble des matrices $\Gamma_{X,Y}$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha + \beta & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & \alpha + \beta & \cdots & \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \cdots & \alpha + \beta \end{pmatrix},$$

où $\alpha = \sigma_X^2$ et $\beta = \sigma_Y^2$.

— Pour le modèle B , l'ensemble des matrices $\tilde{\Gamma}_{X',R}$ suit la même structure :

$$\begin{pmatrix} \alpha + \beta & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & \alpha + \beta & \cdots & \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \cdots & \alpha + \beta \end{pmatrix},$$

où $\alpha = \sigma_X^2, \sigma_R^2$ et $\beta = \sigma_X^2, \mu_R^2$.

Ces matrices partagent la même structure mathématique, et les valeurs des paramètres (α, β) dans chaque modèle respectent cette correspondance. **Ainsi, à l'échelle macroscopique, les deux modèles se comportent exactement de la même manière.

Par ailleurs, dans notre modèle d'impact marché, la variable aléatoire X_n représente les informations publiques (nouvelles, variations des prix passées, etc.) communes à tous les agents, ce qui correspond à ξ_t dans l'article. La variable $R_{i,n}$ désigne la sensibilité des agents à ces informations, soit β_i dans l'article. Cependant, dans notre modèle, cette sensibilité dépend du temps, et doit donc être notée $\beta_{i,t}$. Enfin, $Y_{i,n}$ représente la composante idiosyncratique, c'est-à-dire $\eta_{i,t}$.

Effet sur la distribution des prix de réservation

Grâce à cette première partie, en faisant tendre le pas de temps $\delta_t = \frac{1}{N}$ vers 0, on passe de l'état discret à l'état continu. Ainsi, le prix de réservation $P_i(t)$ du tradeur i évolue selon l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dP_i(t) = a dW_t + \sigma dB_t^{(i)},$$

où :

- W est un mouvement brownien (standard) commun à tous les tradeurs (qui décrit les informations reçues).
- $B^{(i)}$ est un mouvement brownien (standard) spécifique à notre tradeur (qui décrit ses idiosyncrasies), indépendant de W et des $B^{(i')}$ de tous les autres tradeurs.
- Les coefficients a et σ sont des constantes strictement positives fixées.
- L'évolution de P_i est complètement indépendante de sa valeur initiale en $t = 0$.

Maintenant, nous allons considérer que les prix initiaux sont décrits par une certaine loi de probabilité Q_0 (cette loi décrit le prix de réservation d'un trader pris au hasard), ayant une densité ρ_0 . Le but est de déterminer, en supposant que les P_i suivent l'évolution décrite ci-dessus, quelle sera l'évolution de la densité ρ_t décrivant la loi Q_t du prix de réservation au temps t d'un trader tiré au hasard. Il est essentiel de noter que Q_t ne représente pas la loi de $P_i(t)$ lui-même, mais plutôt celle de $P_i(t) - aW_t$. Ainsi, Q_t intègre l'ajustement lié à aW_t . Dès lors, si l'on note $\hat{P}_i(t) = P_i(t) - aW_t$, ce prix ainsi ajusté vérifie l'équation d'évolution suivante :

$$d\hat{P}_i(t) = \sigma dB_t^{(i)},$$

Il s'agit de montrer que cela conduit à l'équation de la chaleur. Pour cela, nous introduisons une fonction-test $\phi(t, x)$ très régulière (bornée dans \mathcal{C}^k pour tout k). Nous considérons le processus consistant à tirer un tradeur i au hasard, puis à regarder l'évolution de $\phi(u, \hat{P}_i(u))$ en fonction du temps u . Ensuite, nous appliquons la formule d'Itô à cette fonction régulière, nous avons donc :

$$d\phi(u, \hat{P}_i(u)) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(u, \hat{P}_i(u))du + \frac{\partial \phi}{\partial x}(u, \hat{P}_i(u))d\hat{P}_i(u) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(u, \hat{P}_i(u))d\langle \hat{P}_i \rangle.$$

En utilisant l'équation d'évolution $d\hat{P}_i(u) = \sigma dB_u^{(i)}$, nous avons $d\langle \hat{P}_i \rangle_u = \sigma^2 du$. L'expression devient :

$$d\phi(u, \hat{P}_i(u)) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(u, \hat{P}_i(u)) + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(u, \hat{P}_i(u)) \right) du + \sigma \frac{\partial \phi}{\partial x}(u, \hat{P}_i(u))dB_u^{(i)}.$$

Nous définissons le processus suivant :

$$M_t = \phi(t, \hat{P}_i(t)) - \phi(0, \hat{P}_i(0)) - \int_0^t \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(u, \hat{P}_i(u)) + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(u, \hat{P}_i(u)) \right) du.$$

Nous avons :

$$dM_u = d\phi(u, \hat{P}_i(u)) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(u, \hat{P}_i(u)) + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(u, \hat{P}_i(u)) \right) du = \sigma \frac{\partial \phi}{\partial x}(u, \hat{P}_i(u)) dB_u^{(i)}$$

Ainsi, le terme de drift de M_t est nul, donc M_t est une martingale locale, et nous admettons que, avec les hypothèses de régularité faites, c'est aussi une martingale.

La propriété de martingale implique que :

$$\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(0) = 0.$$

Par suite :

$$\mathbb{E}(\phi(t, \hat{P}_i(t)) - \phi(0, \hat{P}_i(0))) = \mathbb{E} \left(\int_0^t \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(u, \hat{P}_i(u)) + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(u, \hat{P}_i(u)) \right) du \right).$$

D'où, par interversion de l'espérance et de l'intégrale, dont on admet la légitimité grâce aux hypothèses sur ϕ , nous avons :

$$\mathbb{E}(\phi(t, \hat{P}_i(t))) - \mathbb{E}(\phi(0, \hat{P}_i(0))) = \int_0^t \mathbb{E} \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(u, \hat{P}_i(u)) + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(u, \hat{P}_i(u)) \right) \right) du.$$

Par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\phi(t, \hat{P}_i(t))) &= \int_x \varphi(t, x) \rho_t(x) dx, \\ \mathbb{E}(\phi(0, \hat{P}_i(0))) &= \int_x \varphi(0, x) \rho_0(x) dx, \\ \mathbb{E} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(u, \hat{P}_i(u)) \right) &= \int_x \frac{\partial \phi(u, x)}{\partial t} \rho_u(x) dx, \\ \mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(u, \hat{P}_i(u)) \right) &= \int_x \frac{\partial^2 \phi(u, x)}{\partial x^2} \rho_u(x) dx. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\int_x \phi(t, x) \rho_t(x) dx - \int_x \phi(0, x) \rho_0(x) dx = \int_{u=0}^t du \int_x \frac{\partial \phi(u, x)}{\partial t} \rho_u(x) dx + \frac{\sigma^2}{2} \int_{u=0}^t du \int_x \frac{\partial^2 \phi(u, x)}{\partial x^2} \rho_u(x) dx.$$

On dérive par rapport au temps et on fait une interversion de dérivé et d'intégrale pour avoir :

$$\int_x \frac{\partial (\phi(t, x) \rho_t(x))}{\partial t} dx = \int_x \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} \rho_t(x) dx + \frac{\sigma^2}{2} \int_x \frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial x^2} \rho_t(x) dx.$$

Nous avons obtenu une solution faible de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial \rho_t(x)}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \rho_t(x)}{\partial x^2} = 0$$

B Annexe : Code python des graphiques

Listing 1 – code python de figure 1

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # Paramètres
5 pt = 100 # Prix de rencontre des deux courbes
6 x_bid = np.linspace(pt - 50, pt, 100) # Niveaux de prix bid (x < pt)
7 x_ask = np.linspace(pt, pt + 50, 100) # Niveaux de prix ask (x > pt)
8
9 # Densités convexes pour bid et concaves pour ask
10 rho_B = (pt - x_bid) ** 2 / 1000 # Convexe pour bid (parabole
   croissante)
11 rho_A = (x_ask - pt) ** 0.5 / 2 # Concave pour ask (racine carrée
   croissante)
12
13 # Création du graphique
14 fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 5))
15
16 # Barres bid (en bleu)
17 ax.bar(x_bid, rho_B, width=0.5, color='blue', alpha=0.6,
   edgcolor='black', label="densité volumique d'achat")
18
19 # Barres ask (en rouge)
20 ax.bar(x_ask, rho_A, width=0.5, color='red', alpha=0.6,
   edgcolor='black', label="densité volumique d'achat")
21
22 # Ligne verticale représentant le prix pt
23 ax.axvline(pt, color='black', linestyle=':', linewidth=1)
24 ax.text(pt, max(max(rho_B), max(rho_A)) * 1.1, 'Prix $p_t$',
   fontsize=12, ha='center', va='center', rotation=0)
25
26 # Étiquettes et légendes
27 ax.set_xlabel(r'$x < p_t$' '$x > p_t$', fontsize=12)
28 ax.set_ylabel(r'$\rho_B(x,t)$ / $\rho_A(x,t)$', fontsize=12)
29 ax.legend(fontsize=10, loc='upper right', frameon=False)
30
31 # Affichage
32 plt.show()
```

Listing 2 – code python figure 2

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 from matplotlib import rc
3
4
5 # Paramètres
6 y = np.linspace(-10, 10, 500)
7 lambda_ = 1.0 # Intensité d'apparition
8 nu = 0.5 # Taux d'annulation
9 gamma = 0.2 # Facteur de diffusion
10
11 # Initialisation de la fonction phi_st
12 phi_st = np.zeros_like(y)
13
14 for i in range(len(y)):
15     if y[i] < 0:
16         phi_st[i] = lambda_ / nu * (1 - np.exp(gamma * y[i]))
17     else:
18         phi_st[i] = - lambda_ / nu * (1 - np.exp(-gamma * y[i]))
19
20
21 # Tracé
22 plt.figure(figsize=(8, 5))
23 plt.plot(y, phi_st)
24 plt.title('Solution stationnaire  $\phi_{\text{st}}(y)$ ')
25 plt.xlabel('$y$')
26 plt.ylabel('$\phi_{\text{st}}(y)$')
27 plt.legend()
28 plt.grid()
29 plt.show()

```

Listing 3 – code python figures 3 et 4

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.integrate import quad
4
5 # Définir la liquidité
6 L = 1.0
7
8 # Calcul de l'intégrale
9 def integrand(u, A):
10     return (1 / np.sqrt(4 * np.pi * (1 - u))) * np.exp(
11         -(A**2 * (1 - np.sqrt(u))) / (4 * (1 + np.sqrt(u))))
12
13 # Résolution itérative de l'équation pour A
14 def compute_A(m, J, tol=1e-6, max_iter=10000):
15     # Initialisation de A
16     A = 10
17     for iteration in range(max_iter):
18         integral, _ = quad(integrand, 0, 1, args=(A,))
19         new_A = (m / J) * integral
20
21         # Vérifiez la convergence
22         if np.abs(new_A - A) < tol:
23             return new_A
24         A = new_A
25
26 # Définir la fonction I(Q)
27 def I_Q(Q, m, J):
28     A = compute_A(m, J)
29     return A * np.sqrt((J * Q) / (L * m))
30
31 # Définir les approximations pour m << J et m >> J
32 def approx_I_Q_m_small(Q, m, J):
33     return np.sqrt((m / (J * np.pi)) * (Q / L))
34
35 def approx_I_Q_m_large(Q, m, J):
36     return np.sqrt((2 * Q) / L)
37
38 # Définir les paramètres pour les deux cas
39 Q_values = np.linspace(0.1, 10, 100) # Valeurs de Q
40 m_small, J_large = 0.1, 10.0 # Cas m << J
41 m_large, J_small = 10.0, 0.1 # Cas m >> J
42
43 # Calculer I(Q) et ses approximations pour les deux cas
44 I_exact_small = [I_Q(Q, m_small, J_large) for Q in Q_values]
45 I_approx_small = [approx_I_Q_m_small(Q, m_small, J_large) for Q in
46     Q_values]
```

```

47 I_exact_large = [I_Q(Q, m_large, J_small) for Q in Q_values]
48 I_approx_large = [approx_I_Q_m_large(Q, m_large, J_small) for Q in
    Q_values]
49
50 # Tracé des résultats cas m << J
51 plt.figure(1)
52
53 plt.plot(Q_values, I_exact_small, label="$I(Q)$", color="blue")
54 plt.plot(Q_values, I_approx_small, "--", label="Approximation de
    $I(Q)$ (m << J)", color="orange")
55 plt.title("Cas $m \ll J$")
56 plt.xlabel("$Q$")
57 plt.ylabel("$I(Q)$")
58 plt.legend()
59 plt.grid()
60 plt.show()
61
62 # Tracé des résultats cas m >> J
63 plt.figure(2)
64
65 plt.plot(Q_values, I_exact_large, label="$I(Q)$", color="blue")
66 plt.plot(Q_values, I_approx_large, "--", label="Approximation de
    $I(Q)$ (m >> J)", color="orange")
67 plt.title("Cas $m \gg J$")
68 plt.xlabel("$Q$")
69 plt.ylabel("$I(Q)$")
70 plt.legend()
71 plt.grid()
72 plt.show()

```

C Annexe : Code python de la section 4

Listing 4 – code python du calcul des AIC

```
1 import numpy as np
2 from scipy.optimize import minimize
3
4 # Simuler des données (remplacez par vos données réelles)
5 np.random.seed(42)
6 N = 1000 # Nombre de points
7 Q = np.random.uniform(100, 1000, N)
8 V = np.random.uniform(5, 15, N)
9 T = np.random.uniform(1, 10, N)
10 alpha = np.random.uniform(0.25, 0.3, N)
11 sigma = np.random.uniform(0.01, 0.1, N)
12
13 # Générer les observations Y_obs selon le modèle réel
14 Y_obs = sigma * np.sqrt(2 * alpha * Q / V) + np.random.normal(0,
    np.sqrt(sigma**2 * T), N)
15
16 # Définir les fonctions de vraisemblance négative
17 def neg_log_likelihood_M1(params):
18     A1 = params
19     predicted = A1 * sigma * np.sqrt(Q / V)
20     residuals = Y_obs - predicted
21     variance = sigma**2 * T
22     return 0.5 * np.sum(np.log(variance) + residuals**2 / variance)
23
24
25 # Définir les fonctions de vraisemblance négative
26 def neg_log_likelihood_M2(params):
27     A2 = params
28     predicted = A2 * sigma * Q / (V * np.sqrt(T))
29     residuals = Y_obs - predicted
30     variance = sigma**2 * T
31     return 0.5 * np.sum(np.log(variance) + residuals**2 / variance)
32
33 # Définir les fonctions de vraisemblance négative
34 def neg_log_likelihood_M3(params):
35     A3, tau3 = params
36     predicted = A3 * sigma * np.sqrt(Q / V)
37     residuals = Y_obs - predicted
38     variance = tau3 * sigma**2 * T
39     return 0.5 * np.sum(np.log(variance) + residuals**2 / variance)
40
41 # Définir les fonctions de vraisemblance négative
42 def neg_log_likelihood_M4(params):
43     A4, tau4 = params
44     predicted = A4 * sigma * Q / (V * np.sqrt(T))
```

```

45     residuals = Y_obs - predicted
46     variance = tau4 * sigma**2 * T
47     return 0.5 * np.sum(np.log(variance) + residuals**2 / variance)
48
49 # Définir les fonctions de vraisemblance négative
50 def neg_log_likelihood_M5(params):
51     A5, tau5 = params
52     predicted = A5 * sigma * np.sqrt(Q / V)
53     residuals = Y_obs - predicted
54     variance = np.maximum(tau5, 1e-6) # Évite la division par zéro
55     return 0.5 * np.sum(np.log(variance) + residuals**2 / variance)
56
57 # Définir les fonctions de vraisemblance négative
58 def neg_log_likelihood_M6(params):
59     A6 = params
60     predicted = A6 * sigma * np.sqrt(Q / V)
61     residuals = Y_obs - predicted
62     nu = 2 * sigma**2 * T / np.maximum(sigma**2 * T - 1, 1e-6) # Évite la division par zéro
63     return np.sum( (nu + 1)/2 * np.log(1 + residuals**2 / nu))
64
65 # Fonction pour calculer l'AIC
66 def calculate_aic(log_likelihood, num_params):
67     return 2 * num_params - 2 * log_likelihood
68
69 # Ajuster les modèles et calculer les AIC
70 # Modèle M1
71 result_M1 = minimize(neg_log_likelihood_M1, [1], bounds=[(0, None)])
72 log_L_M1 = -result_M1.fun
73 AIC_M1 = calculate_aic(log_L_M1, num_params=1) # 1 paramètre : A1
74
75 # Modèle M2
76 result_M2 = minimize(neg_log_likelihood_M2, [1], bounds=[(0, None)])
77 log_L_M2 = -result_M2.fun
78 AIC_M2 = calculate_aic(log_L_M2, num_params=1) # 1 paramètre : A2
79
80 # Modèle M3
81 result_M3 = minimize(neg_log_likelihood_M3, [1, 1], bounds=[(0, None),
82     (0, None)])
83 log_L_M3 = -result_M3.fun
84 AIC_M3 = calculate_aic(log_L_M3, num_params=2) # 2 paramètre : A3 et
85     tau3
86
87 # Modèle M4
88 result_M4 = minimize(neg_log_likelihood_M4, [1, 1], bounds=[(0, None),
89     (0, None)])
90 log_L_M4 = -result_M4.fun

```

```

88 AIC_M4 = calculate_aic(log_L_M4, num_params=2) # 2 paramètre : A4 et
      tau4
89
90 # Modèle M5
91 result_M5 = minimize(neg_log_likelihood_M5, [1, 1], bounds=[(0, None),
      (1e-6, None)])
92 log_L_M5 = -result_M5.fun
93 AIC_M5 = calculate_aic(log_L_M5, num_params=2) # 2 paramètre : A5 et
      tau5
94
95 # Modèle M6
96 result_M6 = minimize(neg_log_likelihood_M6, [1], bounds=[(0, None)])
97 log_L_M6 = -result_M6.fun
98 AIC_M6 = calculate_aic(log_L_M6, num_params=1) # 1 paramètre : A6
99
100 # Affichage des résultats
101 print(f"Log-vraisemblance pour M1 : {log_L_M1}")
102 print(f"AIC pour M1 : {AIC_M1}")
103 print(f"Log-vraisemblance pour M2 : {log_L_M2}")
104 print(f"AIC pour M2 : {AIC_M2}")
105 print(f"Log-vraisemblance pour M3 : {log_L_M3}")
106 print(f"AIC pour M3 : {AIC_M3}")
107 print(f"Log-vraisemblance pour M4 : {log_L_M4}")
108 print(f"AIC pour M4 : {AIC_M4}")
109 print(f"Log-vraisemblance pour M5 : {log_L_M5}")
110 print(f"AIC pour M5 : {AIC_M5}")
111 print(f"Log-vraisemblance pour M6 : {log_L_M6}")
112 print(f"AIC pour M6 : {AIC_M6}")

```

Références

- [1] J. Donier, J. Bonart, I. Mastromatteo et J.-P. Bouchaud, *A fully consistent, minimal model for non-linear market impact*, arXiv preprint arXiv :1412.0141v4 [q-fin.TR], mars 2015. Disponible sur : <https://arxiv.org/abs/1412.0141>.