TIPE — Les ensembles infinis et la théorie de Zermelo-Frænkel

Christophe Rose

2003 – 2004

Table des matières

Introduction

L'histoire des infinis commence dès l'apparition des mathématiques, où l'on se rend compte qu'il y a une infinité de nombres entiers. Au IIIe siècle avant J.C., Euclide montre qu'il y a une infinité de nombres premiers. Au XVIIe siècle après J.C., Galilée montre un premier paradoxe concernant les nombres infinis : si à chaque entier naturel on lui associe son unique carré, on s'aperçoit qu'il y a autant de naturels que de carrés, même s'il y a beaucoup plus de naturels que de carrés. Mais au XVIIIe siècle après J.C., vient l'avènement du calcul infinitésimal qui permet de résoudre beaucoup de problèmes en physique et en particulier en mécanique. Cependant, on parvient à se débarrasser des infinitésimaux grâce à la notion de limite. C'est pour résoudre des problèmes de thermodynamique que Cantor va créer au XIXe siècle après J.C. une première théorie des ensembles.

Je commencerai par faire des rappels sur la notion d'ensemble dénombrable, puis je ferai un présentation de la théorie de Zermelo-Frænkel. Ensuite j'introduirai la notion de cardinal transfini pour donner des exemples de bijections, et enfin, je reviendrai sur les axiomes de la théorie de Zermelo-Frænkel.

Chapitre 1

Les infinis dénombrables

1.1 Dénombrabilité

Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. Résumons les différentes propriétés de ces ensembles :

- toute partie $A \subset \mathbb{N}$ infinie est en bijection avec $\mathbb{N}$ ce qu'on notera dans la suite de l'exposé $A \longleftrightarrow \mathbb{N}$;
- $\mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{N}^2$;
- on en déduit que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'ensembles dénombrables alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est dénombrable.

1.2 Conséquences

A l'aide de ces théorèmes, on prouve de nombreux résultats :

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{N}^n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$, et $\mathbb{Q}[X]$ sont en bijection ;
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas en bijection ; nous pourrions le prouver grâce à l'argument diagonal de Cantor, mais nous allons voir une autre manière de le faire ;
- tous les ensembles infinis dénombrables peuvent être munis d'un bon ordre ; cela permet de faire des raisonnements par récurrence sur $\mathbb{Z}$, lorsque l'ordre naturel n'est pas requis.

1.3 Un résultat important en analyse

Il y a une conséquence importante en analyse : si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de réels ou de complexes, alors $\{i \in I | a_i \neq 0\}$ est dénombrable.

En effet, il existe alors M tel que $\sum_{i \in I} a_i \leq M$
donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $card\{i \in I | a_i \geq 1/n\} \leq M * n$,
donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\{i \in | a_i \geq 1/n\}$ est dénombrable fini,
donc $\{i \in I | a_i \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{i \in | a_i \geq 1/n\}$ est dénombrable.

L'étude des séries sommables se réduit à l'étude des séries vectorielles indexées par $\mathbb{N}$.

Chapitre 2

La théorie de Zermelo-Frænkel

2.1 Histoire des différentes théories des ensembles

2.1.1 Fourier

Vers le milieu du XIXe siècle après J.C. commence l'essor de la thermodynamique. Joseph Fourier découvre que la chaleur se propage selon une équation dite "de la chaleur" :
$\mu c\frac{\partial T}{\partial t} = K\Delta T$, soit encore $\mu c\frac{\partial T}{\partial t} = K(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2})$ C'est une équation aux dérivées partielles qui se résout bien si $T(\vec{r},t)$ est de la forme $\Re(A(\vec{r})e^{i\omega t})$. Fourier en a déduit que si on pouvait écrire une fonction comme somme de fonctions trigonométriques on pourrait facilement résoudre l'équation de la chaleur.

2.1.2 Cantor

La théorie des séries de Fourier s'applique aux fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux et la théorie de la transformée de Fourier s'applique à d'autres fonctions qui vérifient certaines conditions à l'infini. Mais il y a toujours un problème pour une fonction du type $\cos(x) + \cos(\sqrt{2}x)$. Pour régler tous ces problèmes, Cantor crée en 1872 une première théorie des ensembles, qui va s'avérer très efficace pour résoudre des problèmes mathématiques. Cette théorie des ensembles va choquer une partie des mathématiciens qui refusent un infini actuel[1] pour un infini potentiel[2].

1. Celui des ensembles.
2. Celui représenté par une limite de quelque chose.

D'ailleurs, vers 1900, Russell découvre une incohérence dans la théorie de Cantor : cette théorie permet de créer l'ensemble E des ensembles qui ne se contiennent pas. Soit $E \notin E$ et E ne se contient pas, donc par définition $E \in E$, soit $E \in E$ et E se contient, donc $E \notin E$. Dans les deux cas il y a contradiction.

2.1.3 Zermelo

Dans les années 1910, Zermelo et Frænkel créent une théorie simple et sans contradiction apparente, et qui porte toujours leurs noms.

2.2 Description de la théorie de Zermelo-Frænkel

La théorie des ensembles consiste en un univers, dont les éléments sont appelés des ensembles. Cette théorie contient les axiomes suivants :

axiome d'extensionalité deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments ;

axiome de l'union une union d'ensembles est un ensemble ;

axiome des parties les parties d'un ensemble forment un ensemble ;

axiome du schéma de remplacement cet axiome permet entre autres de dire que l'ensemble des éléments d'un ensemble donné qui vérifient une propriété donnée forme un ensemble.

Avec ces 4 axiomes, si I est un ensemble d'ensembles E_i, alors $\bigcup_{E_i \in I} E_i$, $\bigcap_{E_i \in I} E_i$, $\prod_{E_i \in I} E_i$ sont des ensembles.
On y ajoute très fréquemment un dernier axiome :

axiome de l'infini il existe un ensemble infini.

En effet on pourrait vivre dans un monde fini, ce qui est possible : le monde pourrait contenir un nombre fini mais incalculable d'états, sans que nous nous en rendions compte. Mais même si c'était le cas, il serait toujours très utile pour les physiciens, de considérer le monde comme infini. De même, il pourrait exister une théorie finie de toutes les mathématiques.

2.3 D'autres axiomes

On peut adjoindre à la théorie de Zermelo-Frænkel d'autres axiomes :

axiome d'accessibilité un cardinal est dit accessible s'il peut être exprimé en fonction de cardinaux plus petits ; cet axiome stipule que tout cardinal est accessible ;

axiome de fondation $\forall E \neq \emptyset$, $\exists F \in E$ tel que $F \cap E = \emptyset$; cet axiome entraîne qu'il n'existe pas d'ensemble x tel que $x = \{x\}$ ou tel que $x \in x$;

axiome du choix le produit cartésien d'ensembles non vides est un ensemble non vide[3] ;

hypothèse du continu $card\mathbb{R}$ est le plus petit cardinal après $card\mathbb{N}$[4] .

3. Cet axiome a l'air évident mais en fait, c'est celui qui pose le plus de problèmes aux mathématiciens.

4. Soit encore $card\mathbb{R} = \aleph_1$.

Chapitre 3

Relation d'ordre entre les cardinaux

3.1 Quelques définitions

Le cardinal d'un ensemble fini est le nombre de ses éléments. Cette définition pose problème lorsqu'on parle d'ensembles infinis.
Pour cela, on pose que $cardE = cardF$ lorsque E et F sont en bijection, et que $cardE \leq cardF$ lorqu'il existe une injection de E dans F. Notons que cette définition est cohérente avec les ensembles finis. Notons également qu'on n'a pas pris la définition $cardE \geq cardF$ lorqu'il existe une surjection de E dans F, parce que si il y a une injection de E dans F, il y a une surjection de F dans E[1], alors que pour prouver "il y a une surjection de F dans E entraîne il y a une injection de E dans F", il faut l'axiome du choix.

3.2 Preuves

Montrons qu'il y a une relation d'ordre entre les cardinaux :

réflexivité id_E est, bien entendu, une injection de E dans E donc $cardE \leq cardE$;

symétrie si $cardE \leq cardF$ et $cardF \leq cardE$, alors $cardE = cardF$; c'est-à-dire que s'il y a une injection $f : E \mapsto F$ et une injection $g : F \mapsto E$ alors il existe une bijection $b : E \mapsto F$; il s'agit du théorème de Cantor-Bernstein ;

transitivité s'il y a une injection $f : E \mapsto F$ et une injection $g : F \mapsto G$ alors il est clair que $g \circ f$ est une injection de E dans G. Donc

1. À seule condition que soit E soit non vide

$(cardE \leq cardF \text{ et } cardF \leq cardG) \Rightarrow cardE \leq cardG$;

caractère total on peut montrer que le fait que cette relation d'ordre est totale (appelée aussi axiome de trichotomie) est équivalent à l'axiome du choix ; on admettra ensuite sauf indication contraire, l'axiome du choix .

3.3 Théorème de Cantor-Bernstein

Le théorème de Cantor-Bernstein est fondamental pour montrer des bijections entre des ensembles. En effet il est beaucoup plus facile de construire une injection qu'une bijection. Je vais vous donner la démonstration de ce théorème :

- soient E et F deux ensembles et $f : E \mapsto F$, $g : F \mapsto E$ deux injections, alors nous allons créer une bijection $b : E \mapsto F$;
- appelons A l'ensemble des parties X de E telles que X et $g\,(F \backslash f(X))$ ont une intersection vide ;
- A est stable par réunion, il possède donc un plus grand élément $X_0 = \bigcup_{X \in A} X$ pour l'inclusion ;
- X_0 et $g\,(F \backslash f(X_0))$ forment alors une partition de E ;
- la fonction $\begin{array}{rccl} b : & E & \to & F \\ & x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} f(x) & \text{si} & x \in X_0 \\ g^{-1}(x) & \text{si} & x \notin X_0 \end{array} \right. \end{array}$ est alors bijective.

3.4 Théorème de Cantor

Ce théorème est fondamental pour montrer qu'un ensemble est beaucoup plus grand qu'un autre. Je vais également vous en donner une démonstration :

- si A est un ensemble quelconque, $cardA < card\mathcal{P}(A)$.
- $\begin{array}{ccc} A & \to & \mathcal{P}(A) \\ x & \mapsto & \{x\} \end{array}$ est clairement injective ;
- supposons par l'absurde qu'il existe une bijection f entre A et $\mathcal{P}(A)$;
- $E = \{t \in A | t \notin f(t)\}$ est une partie de A donc il possède un antécédent par f, t_0 ;
- soit $t_0 \in f(t_0)$, alors $t_0 \notin E = f(t_0)$
  soit $t_0 \notin f(t_0)$, alors $t_0 \in E = f(t_0)$;
- dans les deux cas, il y a contradiction donc A et $\mathcal{P}(A)$ ne sont pas en bijection.

Chapitre 4

Ensembles en bijection avec $\mathbb{R}$

Grace à ces théorèmes, nous allons pouvoir établir beaucoup de bijections entre des ensembles, et en particulier avec $\mathbb{R}$.

4.1 $\mathbb{R}$ est en bijection avec tout intervalle de longueur non nulle

–
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow &]-1;1[\\ x & \mapsto & \frac{x}{1+|x|} \end{array}$$
est une bijection de réciproque
$$g: \begin{array}{ccc}]-1;1[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \frac{y}{1-|y|} \end{array} .$$

– les applications affines $x \mapsto ax+b$ telles que $a \neq 0$ sont des bijections ;
– $\mathbb{R}$ est donc en bijection avec tout intervalle ouvert de longueur non nulle ;
– par le théorème de Cantor-Bernstein, $\mathbb{R}$ est en bijection avec toute partie non vide de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, donc en particulier tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ ainsi que tout intervalle de longueur non nulle ;
– cependant, une partie de $\mathbb{R}$ dénombrable peut être dense dans $\mathbb{R}$, comme $\mathbb{Q}$, et une partie de $\mathbb{R}$ non dénombrable peut ne contenir aucun intervalle ouvert, comme l'ensemble de Cantor
$$\{\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{3^i} | (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \{-1;1\}^{\mathbb{N}^*}\} .$$

4.2 $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

On utilise aussi le théorème de Cantor-Bernstein pour le prouver :

- en écrivant un élément de $[0;1[$ en base 2, et en considérant la suite de ses chiffres, ont obtient une partie de $\mathbb{N}$; exemples :
  - $1/2 = \overline{0{,}011111\ldots}^2$ donne $\mathbb{N}^*$,
  - $1/3 = \overline{0{,}010101\ldots}^2$ donne l'ensemble des nombres pairs ;
- on obtient une injection $f : [0;1[\to \mathcal{P}(\mathbb{N})$
- il est plus difficile de trouver une injection dans l'autre sens, car $\mathbb{N}^*$ et $\{0\}$ correspondent au même réel $1/2$;
- pour cela on crée une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $[0;2]$ en ajoutant 1 à l'image des parties finies de $\mathbb{N}$;
- d'après le théorème de Cantor-Bernstein il y a donc une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{R}$;
- or d'après le théorème de Cantor, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable donc $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable ;
- on obtient alors une autre preuve de cet énoncé, qui utilise toujours l'argument diagonal, mais seulement dans le théorème de Cantor.

4.3 $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathbb{R}^2$

Cantor a longtemps cherché que c'était faux mais il découvre à sa stupéfaction que $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathbb{R}^2$. Voici sa preuve de façon résumée :

$$\begin{array}{lllllll} \mathbb{R} & \longleftrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \longleftrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{Z}) & \longleftrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{Z}_-^*) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) \\ \mathbb{R} & \longleftrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 & \longleftrightarrow \mathbb{R}^2 & & & \end{array}$$

- $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathbb{R}^n$;
- cela implique en particulier que $\mathbb{R}$ est en bijection avec tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel et tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel .

4.4 Encore des bijections

- $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ donc avec $\mathbb{R}[X]$;
- $\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \longleftrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$\mathbb{R}$ est en bijection avec certains $\mathbb{R}$-espace vectoriels de dimension infinie, et voici l'un des exemples les plus spectaculaires :

- $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ x & \mapsto & (t \mapsto x) \end{array}$ est évidemment injective ;
- $\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \\ f & \mapsto & (f(t))_{t\in\mathbb{Q}} \end{array}$ est aussi injective ;
- comme $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ sont en bijection, par le théorème de Cantor-Bernstein, $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont en bijection.

Par contre, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ne sont pas en bijection. En effet, sinon $\mathbb{R}$ serait en bijection avec $\mathcal{F}(\mathbb{R},\{0;1\})$, donc avec $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Chapitre 5

L'axiome du choix et l'hypothèse du continu

5.1 Histoire

L'histoire de ces axiomes commence dès l'apparition de la théorie des ensembles.
Cantor pose dans sa théorie des ensembles que tout ensemble possède un bon ordre.
Puis Zermelo démontre que cet axiome est équivalent à un autre axiome, l'axiome du choix.
Kurt Gödel montre vers la fin des années 1930 que la théorie de Zermelo-Frænkel ne permet pas de démontrer que l'axiome du choix soit fausse et que la théorie de Zermelo-Frænkel munie de l'axiome du choix ne permet pas de démontrer que l'hypothèse du continu soit fausse.
Paul Cohen montre en 1963 que la théorie de Zermelo-Frænkel ne permet pas de démontrer l'axiome du choix et que la théorie de Zermelo-Frænkel munie de l'axiome du choix ne permet pas de démontrer l'hypothèse du continu. L'axiome du choix est donc un énoncé indécidable dans la théorie de Zermelo-Frænkel et l'hypothèse du continu est un énoncé indécidable dans la théorie de Zermelo-Frænkel munie de l'axiome du choix.

5.2 L'axiome du choix ouvre un vaste domaine des mathématiques

Cet axiome permet de démontrer de nombreux théorèmes :
– tout ensemble peut être bien ordonné, c'est-à-dire qu'il existe une re-

lation d'ordre sur cet ensemble (qui n'est généralement pas l'ordre naturel), telle que toute partie de cet ensemble possède un plus petit élément ;
- l'axiome de trichotomie : de deux ensembles quelconques il y en a un qui s'injecte dans l'autre ;
- tout espace vectoriel admet une base, donc en particulier $\mathbb{R}$ possède une $\mathbb{Q}$-base ;
- tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.

5.3 Les paradoxes liés l'axiome du choix

certaines personnes refusent l'axiome du choix à cause des nombreux paradoxes qu'il entraîne :
- il existe des endomorphismes du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel dont le graphe n'est pas une droite mais une partie dense dans $\mathbb{R}^2$, au choix bijectifs, ou bien non injectifs et non surjectifs ; il suffit de prendre l'endomorphisme u tel que $u(1) = -1$ et $u(\alpha) = \alpha$ pour tout autre vecteur α de la base, ou tel que $u(1) = 1$ et $u(\alpha) = 0$ pour tout autre vecteur de la base ;
- le paradoxe de Banach-Tarski : on peut découper une boule de volume 1 en cinq morceaux et les réarranger en une boule de volume 2.

5.4 L'hypothèse du continu

- Beaucoup de personnes admettent l'hypothèse du continu, et même l'hypothèse du continu généralisée :

$$\forall n, \aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n} \ ;$$

- d'autres pensent qu'il y a un cardinal entre $card\mathbb{N}$ et $card\mathbb{R}$, et même qu'il y en a une infinité.

5.5 L'axiome du choix et l'hypothèse du continu sont-ils vraiment indécidables ?

Les travaux de Gödel et de Cohen ne montrent pas qu'on ne saura jamais si l'axiome du choix et l'hypothèse du continu sont vraies ou fausses, ils montrent seulement que la théorie de Zermelo-Frænkel est trop faible pour décider de ces problèmes. Mais il serait réducteur de limiter les mathématiques à la seule théorie de Zermelo-Frænkel et presque l'ensemble de la communauté mathématique a accepté l'axiome du choix tant il est indispensable. Un non-spécialiste de la théorie des ensembles préfèrera une solution élégante à une solution longue qui ne nécessite pas l'axiome du choix. Cependant, un théoricien des ensembles pourra étudier des mathématiques avec la négation de l'axiome du choix. La question de la validité de l'hypothèse du continu est plus problématique car rajouter l'hypothèse du continu ou sa négation n'entraîne pratiquement aucun changement dans le reste des mathématiques. Ainsi, on peut être convaincu de l'hypothèse du continu et aussi souvent de l'hypothèse du continu généralisé si on pense qu'il y a une certaine régularité en mathématique. On peut aussi être convaincu qu'il y a un cardinal entre $card\mathbb{N}$ et $card\mathbb{R}$, et souvent même une infinité, si on est convaincu de d'immensité de $\mathbb{R}$ par rapport à $\mathbb{N}$.

5.6 L'infini de $\mathbb{R}$ est déjà inconcevable

Je vais terminer sur une remarque sur l'immensité de $\mathbb{R}$.

- J'appelle nombre imaginable un nombre défini par un nombre fini de caractères dans une langue donnée, par exemple e est défini par "la limite de la somme pour k variant de 0 à n de l'inverse de la factorielle de k" ;
- L'ensemble des caractères disponibles est supposé dénombrables, donc on peut donner à chaque définition une suite presque nulle, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$, qui est en bijection avec $\mathbb{N}$;
- l'ensemble des nombres imaginables est donc dénombrable ;
- on ne pourra jamais décrire parfaitement certains réels ; et l'on connaît ainsi un ensemble dont on ne connaîtra jamais un seul de ses éléments : "l'ensemble des nombres inimaginables".

Nous voyons mieux pourquoi l'axiome du choix et l'hypothèse du continu posent autant de problèmes.

Conclusion

La théorie de Zermelo-Frænkel a été d'un grand recours en mathématiques et il serait impensable aujourd'hui de nous en passer. Elle nous a également poussé à réfléchir profondément sur la nature de l'infini. Mais nous avons vu que le problème de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu nécéssite de raisonner sur différentes théories des ensembles. C'est pour cela que la théorie de Zermelo-Frænkel est inefficace pour certains domaines des mathématiques, comme la démonstration de la cohérence d'une théorie des ensembles dans une autre théorie des ensembles.

Il nous faut alors d'autres théories, dont les objets principaux ne sont pas les ensembles, comme la théorie des modèles, la théorie du λ-calcul, la théorie de la démonstration,...