# Introduction

L'histoire des infinis commence dès l'apparition des mathématiques, où l'on se rend compte qu'il y a une infinité de nombres entiers. Au IIIe siècle avant J.C., Euclide montre qu'il y a une infinité de nombres premiers. Au XVIIe siècle de notre ère, Galilée montre un premier paradoxe concernant les nombres infinis : si on associe à chaque entier naturel son unique carré, on s'aperçoit qu'il y a autant de naturels que de carrés, même s'il y a beaucoup plus de naturels que de carrés. Mais au XVIIIe siècle, vient l'avènement du calcul infinitésimal qui permet de résoudre beaucoup de problèmes en physique et en particulier en mécanique. Cependant, on parvient à se débarrasser des infinitésimaux grâce à la notion de limite. C'est pour résoudre des problèmes de thermodynamique que Cantor va créer au XIXe siècle une première théorie des ensembles.
Après quelques rappels sur la notion de dénombrabilité, puis la description de la théorie de Zermelo-Frænkel, nous donnerons une définition du cardinal d'un ensemble infini avant de chercher les ensembles en bijection avec $\mathbb{R}$. La dernière partie sera consacrée à l'axiome du choix et à l'hypothèse du continu.

# 1 Les infinis dénombrables

Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. Résumons les différentes propriétés de ces ensembles :

- toute partie $A \subset \mathbb{N}$ infinie est en bijection avec $\mathbb{N}$ ce qu'on notera dans la suite du texte $A \longleftrightarrow \mathbb{N}$ ;
- $\mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{N}^2$ ;
- on en déduit que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'ensembles dénombrables alors $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est dénombrable.

À l'aide de ces théorèmes, on prouve de nombreux résultats :

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{N}^n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$, $\mathbb{Q}[X]$ ainsi que l'ensemble des réels algébriques sont en bijection ;
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas en bijection ; on peut le prouver par l'argument diagonal de Cantor mais aussi par le fait que $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ;
- tous les ensembles infinis dénombrables peuvent être munis d'un bon ordre ; cela permet de faire des raisonnements par récurrence sur $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$, lorsque l'ordre naturel n'est pas requis.

Il y a une conséquence importante en analyse : si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de réels ou de complexes, alors son support $\{i \in I | a_i \neq 0\}$ est dénombrable. L'étude des séries sommables se réduit donc à l'étude des séries vectorielles indexées par $\mathbb{N}$.

# 2 La théorie de Zermelo-Frænkel

Vers le milieu du XIXe siècle commence l'essor de la thermodynamique. Joseph Fourier découvre que la chaleur se propage selon une équation dite "de la chaleur". Il a trouvé que si on pouvait écrire une fonction comme somme de fonctions trigonométriques on pourrait facilement résoudre l'équation de la chaleur.

Cela implique un raisonnement sur des ensembles. Pour régler tous ces problèmes, Cantor crée en 1872 une première théorie des ensembles, qui va s'avérer très efficace pour résoudre des problèmes mathématiques. Mais vers 1900, Russell découvre une incohérence dans la théorie de Cantor : cette théorie permet de créer l'ensemble $E$ des ensembles qui ne se contiennent pas. Soit $E \notin E$ et $E$ ne se contient pas, donc par définition $E \in E$, soit $E \in E$ et $E$ se contient, donc $E \notin E$. Dans les deux cas, il y a contradiction.

Dans les années 1910, Zermelo et Frænkel créent une théorie simple et sans contradiction apparente, et qui porte toujours leurs noms.

La théorie des ensembles consiste en un univers, dont les éléments sont appelés des ensembles. Cette théorie contient les axiomes suivants :

**axiome d'extensionalité** deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils contiennent les mêmes éléments ;

**axiome de l'union** une union d'ensembles est un ensemble ;

**axiome des parties** les parties d'un ensemble forment un ensemble ;

**axiome du schéma de remplacement** cet axiome permet entre autres de dire que l'ensemble des éléments d'un ensemble donné qui vérifient une propriété donnée forme un ensemble.

Avec ces 4 axiomes, si $I$ est un ensemble d'ensembles $E_i$, alors $\bigcup_{E_i \in I} E_i$, $\bigcap_{E_i \in I} E_i$, $\prod_{E_i \in I} E_i$ sont des ensembles ; l'image d'un ensemble par une fonction est un ensemble, $\emptyset$ existe et est unique, si $E$ et $F$ sont deux ensembles alors $\{E,F\}$ aussi. On y ajoute très fréquemment un dernier axiome :

**axiome de l'infini** il existe un ensemble infini.

En effet, l'univers pourrait prendre un nombre fini mais incalculable d'états, sans que nous nous en rendions compte. Mais même si c'était le cas, il serait toujours très utile pour les physiciens, de considérer le monde comme infini. De même, il pourrait exister une théorie finie de toutes les mathématiques.

On peut adjoindre à la théorie de Zermelo-Frænkel d'autres axiomes :

**axiome d'accessibilité** un cardinal est dit accessible s'il peut être exprimé en fonction de cardinaux plus petits ; cet axiome stipule que tout cardinal est accessible ;

**axiome de fondation** $\forall E \neq \emptyset, \exists F \in E$ tel que $F \cap E = \emptyset$ ; cet axiome entraîne qu'il n'existe pas d'ensemble $x$ tel que $x = \{x\}$ ou tel que $x \in x$ ;

**axiome du choix** le produit cartésien d'ensembles non vides est un ensemble non vide ; cet axiome a l'air évident mais en fait, c'est celui qui pose le plus de problèmes aux mathématiciens ;

**hypothèse du continu** $card\mathbb{R}$ est le plus petit cardinal après $card\mathbb{N}$, soit encore $card\mathbb{R} = \aleph_1$.

# 3 Relation d'ordre entre les cardinaux

Le cardinal d'un ensemble fini est le nombre de ses éléments. Cette définition pose problème lorsqu'on parle d'ensembles infinis.

Pour cela, on pose que $cardE = cardF$ lorsque $E$ et $F$ sont en bijection, et que $cardE \leq cardF$ lorqu'il existe une injection de $E$ dans $F$.

Montrons qu'il y a une relation d'ordre entre les cardinaux :

**réflexivité** $id_E$ est, bien entendu, une injection de $E$ dans $E$ donc $cardE \leq cardE$ ;

**symétrie** si $cardE \leq cardF$ et $cardF \leq cardE$, alors $cardE = cardF$ ; c'est-à-dire que s'il y a une injection $f : E \mapsto F$ et une injection $g : F \mapsto E$ alors il existe une bijection $b : E \mapsto F$ ; il s'agit du théorème de Cantor-Bernstein ;

**transitivité** s'il y a une injection $f : E \mapsto F$ et une injection $g : F \mapsto G$ alors il est clair que $g \circ f$ est une injection de $E$ dans $G$. Donc $(cardE \leq cardF \text{ et } cardF \leq cardG) \Rightarrow cardE \leq cardG$ ;

**caractère total** on peut montrer que le fait que cette relation d'ordre est totale (appelée aussi axiome de trichotomie) est équivalent à l'axiome du choix ; on admettra ensuite sauf indication contraire, l'axiome du choix.

### 3.1 Théorème de Cantor-Bernstein

Le théorème de Cantor-Bernstein est fondamental pour montrer des bijections entre des ensembles. Il se prouve de manière constructive sans utiliser l'axiome du choix, c'est-à-dire que l'on possède une formule explicite pour la bijection ainsi crée.

### 3.2 Théorème de Cantor

$$cardA < card\mathcal{P}(A)$$

Ce théorème est fondamental pour montrer qu'un ensemble est beaucoup plus grand qu'un autre. Il se prouve par une variante de l'argument diagonal de Cantor.

## 4 Ensembles en bijection avec $\mathbb{R}$

Grace à ces théorèmes, nous allons pouvoir établir de nombreuses bijections entre des ensembles, et en particulier avec $\mathbb{R}$.

- $\mathbb{R}$ est en bijection avec tout intervalle ouvert de longueur non nulle ;
- par le théorème de Cantor-Bernstein, $\mathbb{R}$ est en bijection avec toute partie non vide de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, donc en particulier tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ ainsi que tout intervalle de longueur non nulle ;
- cependant, une partie de $\mathbb{R}$ dénombrable peut être dense dans $\mathbb{R}$, comme $\mathbb{Q}$, et une partie de $\mathbb{R}$ non dénombrable peut ne contenir aucun intervalle ouvert, comme l'ensemble de Cantor.

- $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ;
- d'après le théorème de Cantor, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable donc $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

- $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathbb{R}^2$ ; Cantor a mis beaucoup de temps pour le prouver, mais aujourd'hui il est facile de le faire en utilisant $\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ;

- $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathbb{R}^n$ ;
- cela implique en particulier que $\mathbb{R}$ est en bijection avec tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel et tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie ;
- $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ donc avec $\mathbb{R}[X]$ ;
- $\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \longleftrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ;
- $\mathbb{R}$ est en bijection avec de grands $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, dont $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ;
- par contre, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ne sont pas en bijection, sinon $\mathbb{R}$ serait en bijection avec $\mathcal{F}(\mathbb{R},\{0;1\})$, donc avec $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

# 5 L'axiome du choix et l'hypothèse du continu

L'histoire de ces axiomes commence dès l'apparition de la théorie des ensembles.
Cantor pose dans sa théorie des ensembles que tout ensemble possède un bon ordre. Zermelo démontre que cet axiome est équivalent à un autre axiome, l'axiome du choix.
Kurt Gödel et Paul Cohen montrent que ces deux axiomes sont indépendants de la théorie de Zermelo-Frænkel.

L'axiome du choix permet de démontrer de nombreux théorèmes :
- tout ensemble peut être bien ordonné, c'est-à-dire qu'il existe une relation d'ordre sur cet ensemble (qui n'est généralement pas l'ordre naturel), telle que toute partie de cet ensemble possède un plus petit élément ;
- l'axiome de trichotomie : de deux ensembles quelconques il y en a un qui s'injecte dans l'autre ;
- tout espace vectoriel admet une base, donc en particulier $\mathbb{R}$ possède une $\mathbb{Q}$-base ;
- tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.

Quelques personnes refusent l'axiome du choix à cause des nombreux paradoxes qu'il entraîne :
- il existe des endomorphismes du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel dont le graphe n'est pas une droite mais une partie dense dans $\mathbb{R}^2$.
- le paradoxe de Banach-Tarski : on peut découper une boule de volume 1 en cinq morceaux et les réarranger en une boule de volume 2.

De nombreuses personnes admettent l'hypothèse du continu, et même l'hypothèse du continu généralisée :

$$\forall n,\ \aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n} ;$$

d'autres pensent qu'il y a un cardinal entre $card\mathbb{N}$ et $card\mathbb{R}$, et même qu'il y en a une infinité

Il serait réducteur de limiter les mathématiques à la seule théorie de Zermelo-Frænkel et presque l'ensemble de la communauté mathématique a accepté l'axiome du choix tant il est indispensable. La question de la validité de l'hypothèse du continu est plus problématique car rajouter l'hypothèse du continu ou sa négation n'entraîne pratiquement aucun changement dans le reste des mathématiques.

Terminons par une remarque sur l'immensité de $\mathbb{R}$.

– Appelons nombre imaginable un réel défini par un nombre fini de caractères dans une langue donnée, par exemple $e$ est défini par "la limite de la somme pour $k$ variant de 0 à $n$ de l'inverse de la factorielle de $k$" ;
– L'ensemble des caractères disponibles est supposé dénombrable, donc on peut donner à chaque définition une suite presque nulle, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$, qui est en bijection avec $\mathbb{N}$ ;
– l'ensemble des nombres imaginables est donc dénombrable ;
– on ne pourra jamais décrire parfaitement certains réels ; et l'on connaît ainsi un ensemble dont on ne connaîtra jamais un seul de ses éléments : "l'ensemble des nombres réels non imaginables".

Nous voyons mieux pourquoi l'axiome du choix et l'hypothèse du continu posent autant de problèmes.

# Conclusion

La théorie de Zermelo-Frænkel a été d'un grand recours en mathématiques et il serait impensable aujourd'hui de nous en passer. Elle nous a également poussé à réfléchir profondément sur la nature de l'infini. Mais nous avons vu que le problème de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu nécessite de raisonner sur différentes théories des ensembles. C'est pour cela que la théorie de Zermelo-Frænkel est inefficace pour certains domaines des mathématiques, comme la démonstration de la cohérence d'une théorie des ensembles dans une autre théorie des ensembles.

Il nous faut alors d'autres théories, dont les objets principaux ne sont pas les ensembles, comme la théorie des modèles, la théorie du $\lambda$-calcul, la théorie de la démonstration...

# Références


[1] Gilles Dowek. *La logique*. Flammarion, coll."Dominos", 1995.

[2] Ian Stewart. *Les mathématiques*. Belin, coll."Sciences d'avenir", 1991.