

Oraux à l'École Polytechnique

Christophe Rose

1 Oraux de mathématiques

1.1 Mathématiques I

Daniel Barsky

50 minutes

Soit f une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On note $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

a est appelé point périodique d'ordre n si $f^n(a) = a$.

a est appelé point périodique primitif d'ordre n si $f^n(a) = a$ et si $f^k(a) \neq a$ pour $k \in \{1 \dots n\}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner des fonctions qui possèdent des points primitifs d'ordre n .
2. (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}, c = f(a), d = f(b)$. On suppose $a < b$ et $c < d$. Montrer que $[c; d] \subset f([a; b])$.
(b) Soient I et J deux segments tels que $I \subset f(J)$. Montrer qu'il existe un segment $J_0 \subset J$ tel que $f(J_0) = I$.
(c) Soit I un segment tel que $I \subset f(I)$. Montrer que f possède un point fixe.
3. Soit a un point primitif d'ordre 3 et $b = f(a); c = f(b)$.
(a) Montrer pourquoi on peut supposer $a < b < c$.
(b) Soient $I_0 = [a; b]$ et $I_1 = [b; c]$. Montrer que $I_1 \subset f(I_0), I_1 \subset f(I_1), I_0 \subset f(I_1)$ et en déduire que f possède un point fixe.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{\cosh t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{x^2 + (2n+1)^2}$$

1.2 Mathématiques II

Michel Langevin

50 minutes

1. (a) Quel est le rang de la forme quadratique $ab + bc + ca$?
Quel est le rang de la forme quadratique $ab + bc + cd + da$?
Mettre sous forme de somme de carrés la deuxième puis la première.

- (b) Mettre sous forme de somme de carrés $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ de sorte que les coefficients restent entiers.
Faire de même avec $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2)$.
- Calculer $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + 1000 \cdot 1001 \cdot 1002$.
 - Soient O, A, B, C des points du plan d'affixes complexes respectives $0, a, b, c$, où a, b, c sont de module 1. Montrer que $\widehat{(OA, OB)} = 2\widehat{(CA, CB)}$.

1.3 Analyse de Documents Scientifiques

André Plagne

2 heures de préparation

40 minutes de passage

Sujet 4.1. Démonstration élémentaire du théorème des nombres premiers. Le sujet comporte une page de garde en \LaTeX et 13 pages extraites d'un livre. La page de garde donne la marche à suivre et des indications sur la transformation d'Abel, la constante d'Euler γ et la fonction d'inversion de Möbius μ .

L'extrait du livre est en 6 parties. La première est une introduction au théorème des nombres premiers. Ce dernier est prouvé au milieu du XIX^e siècle grâce à la fonction ζ de Riemann, puis les autres démonstrations suivent, dont celle décrite dans le livre.

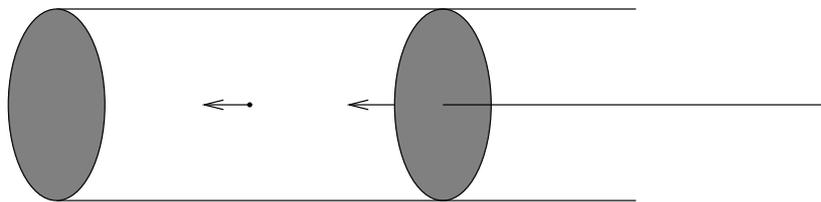
La seconde partie traite de la réduction du problème à la recherche de la limite d'une suite convergente, qu'on déterminera dans les quatre dernières parties. La partie 5 est consacrée à la démonstration d'un lemme géométrique et de son corollaire, et elle est indépendante des autres parties.

2 Oraux de physique-chimie

2.1 Physique

Éric Aubourg

50 minutes



Soit un cylindre dont une extrémité est reliée à un piston qui vibre. Une particule à l'intérieur de ce cylindre se déplace horizontalement.

- Que devient sa vitesse?
- Faire le cas où la particule est très rapide par rapport au piston.
- Faire le cas où la particule est très lente par rapport au piston.
- Faire la résolution exacte, puis faire le cas où la courbe de vitesse est en dents de scie.

Un réservoir contenant un mélange d'eau et d'ammoniac est chauffé par une flamme et rentre en ébullition à 100°C. Le gaz passe ensuite dans un détendeur à environ 0°C, puis un bac d'eau à 20°C absorbe l'ammoniac et aspire le gaz. L'eau du bac coule ensuite dans le réservoir.

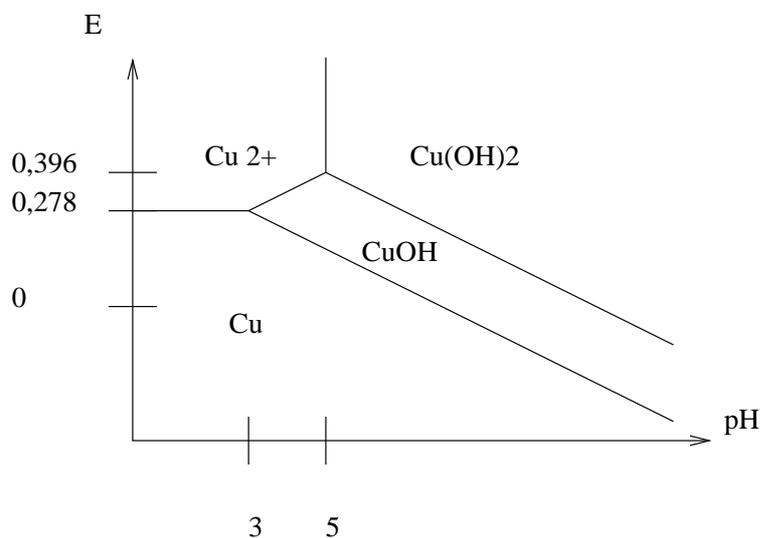
1. Calculer le rendement du réfrigérateur à aspiration.

2.2 Chimie

Anne-Marie Romulus

50 minutes

1. Quelles sont les mailles du graphite et du diamant?
2. Le côté d'un hexagone mesure 0,1415 nm, la distance entre deux plans est de 0,335 nm et la distance entre deux atomes de carbone dans le diamant est de 0,156 nm. Calculer la densité du graphite et du diamant.



$$[Cu] = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

1. Nombre d'oxydation des différentes espèces.
2. Que devient CuOH en cas d'acidité?
3. Calculer la constante de réaction de dismutation.
4. Calculer les potentiels standard de réaction. (Lors de cette question, donner la formule générale du potentiel de réaction.)