Oraux aux Écoles Normales Supérieures

Christophe Rose

1 Oraux de mathématiques

1.1 Mathématiques Lyon (45 minutes)

Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension finie, unitaire, intègre, et telle que tout élément non nul est inversible. On identifie $\mathbb{R}1_A$ à $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\forall x \in A, \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - \alpha x - \beta = 0$.
2. Montrer que $\forall x \in A, x^2 \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x \in \mathbb{R}$.
3. Soit $V = \{x \in A \mid x^2 \in \mathbb{R}_-\}$. Montrer que $\forall x \in A, \exists! \xi \in \mathbb{R} \mid (x - \xi) \in V$.
4. Soient $x,y \in V, \alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\alpha x + \beta y \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x + \beta y = 0$.
5. Montrer que V est un espace vectoriel.

1.2 Mathématiques Ulm (1 heure)

Soit $E \subset \mathbb{R}^m$. $\alpha \geq 0$ est appelé un point de rencontre lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (p_1, \ldots p_n) \in E^n, \exists (p,q) \in E^2 \mid$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|p - p_i\| \geq \alpha; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|q - p_i\| \leq \alpha$$

Montrer que si E est fini, alors un tel α existe.

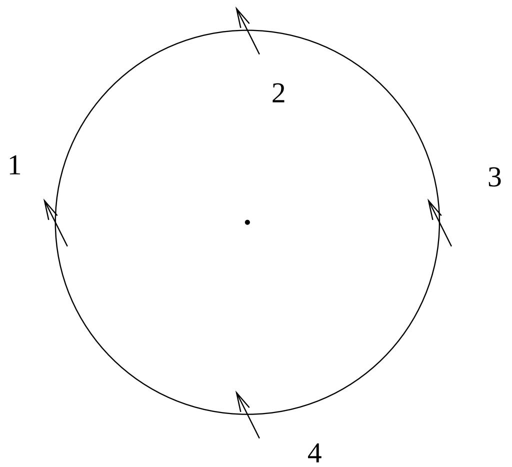
1.3 Mathématiques Ulm/Lyon/Cachan (45 minutes)

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer qu'il existe une norme euclidienne telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq \sqrt{(x|x)} \leq \|x\| \cdot \sqrt{n}$.
2. Indication : montrer qu'il suffit de prouver que $\forall K \text{compact}, \exists B \text{ellipsoïde} \mid B \subset K \subset B \cdot \sqrt{n}$.
3. Indication : montrer que le volume d'un ellipsoïde est proportionnel au produit de ses dimensions.

2 Oral de physique

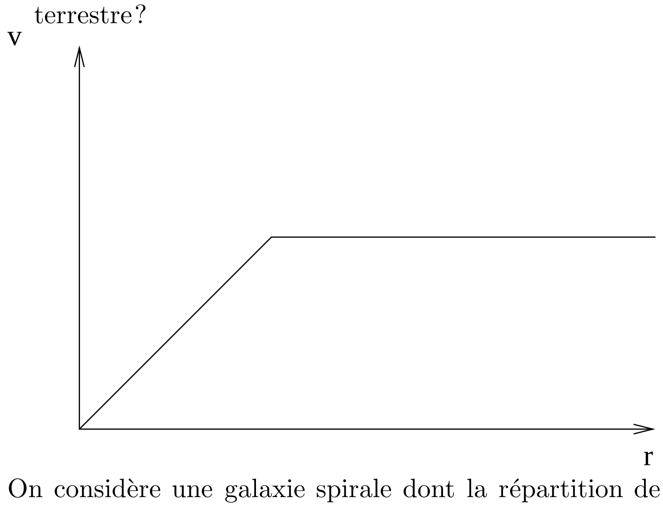
2.1 Physique Ulm/Lyon/Cachan (45 minutes)



On positionne 4 boussoles (moments magnétiques) sur un cercle. Ces boussoles oscillent à une période T_0. Lorsqu'on fait passer un courant $I = 2A$ dans le fil situé au centre du cercle, les périodes d'oscillations des boussoles varient :

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{T_3}{T_0} = 0{,}67 \qquad \frac{T_2}{T_0} = 1 \qquad \frac{T_4}{T_0} = 0{,}57$$

1. Que se passe-t-il ?
2. Le rayon du cercle vaut $R = 1\text{cm}$, quelle est l'intensité du champ magnétique terrestre ?



On considère une galaxie spirale dont la répartition de vitesse est donnée dans le graphe ci-dessus.

1. Quelle est la répartition de masse ?
2. Quelle devrait être la répartition de vitesse au loin ?
3. Culture générale : Pourquoi la vitesse reste constante au loin ?

3 Oraux d'informatique

3.1 Informatique Cachan (45 minutes)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire irréflexive sur un alphabet A.

On dit que $w \to w'$ si $\left\{ \begin{array}{ccc} w & = & w_1abw_2 \\ w' & = & w_1baw_2 \end{array} \right.$ et $(a,b) \in \mathcal{R}$.

On note $\Rightarrow^*$ la fermeture réflexive et transitive de $\to$.

On note $\mathcal{R}^*(L)$ la clôture par $\Rightarrow^*$ de L.

Un langage L est dit $\mathcal{R}$-clos si $L = \mathcal{R}^*(L)$.

1. Soit $L = (ab)^*$ et $\mathcal{R} = \{(b,a)\}$. Calculer $\mathcal{R}^*(L)$, est-t-il reconnaissable?
2. Soit, pour deux mots x et y,

$$x \sqcup\!\sqcup_{\mathcal{R}} y = \left\{ x_1y_1 \dots x_ny_n \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1,\dots x_n, y_1,\dots y_n \in A^*; \\ x = x_1 \dots x_n; y = y_1 \dots y_n; \\ \forall i < j, x_jy_i \Rightarrow^* y_ix_j \end{array} \right\}$$

   Montrer que $\mathcal{R}^*(\{xy\}) = \mathcal{R}^*(\{x\}) \sqcup\!\sqcup_{\mathcal{R}} \mathcal{R}^*(\{y\})$.
3. Soient L et M deux langages $\mathcal{R}$-clos. Montrer que $\mathcal{R}^*(LM) = L \sqcup\!\sqcup_{\mathcal{R}} M$.
4. L et M sont deux langages $\mathcal{R}$-clos et reconnaissables. Donner un automate qui reconnaît $L \sqcup\!\sqcup_{\mathcal{R}} M$. Faire d'abord le cas $\mathcal{R} = \{(c_1,c_2)\}$, avec $c_1 \neq c_2$.

3.2 Informatique Ulm (45 minutes)

Alice et Bob jouent au jeu suivant. Alice choisit un nombre $i \in \{1,\dots n\}$, et Bob dit une suite de nombres $b_1,\dots b_j$. Alice doit dire à chaque fois si $i < b$, $i = b$, ou $i > b$. Bob gagne lorsqu'il peut trouver i.

1. Quelle est la stratégie optimale pour Bob?
2. Calculer la complexité moyenne du jeu pour les cas $n \leq 4$.
3. Généraliser pour tout n.
4. Écrire un algorithme qui prend n comme argument, qui donne la complexité moyenne ainsi qu'un b_1 qui arrive à cette complexité.