

TP8 : Représentations des ensembles

Christophe Rose

Vendredi 23 mai 2008

`christophe.rose@ens.fr`

`http://www.eleves.ens.fr/home/rose/caml`

Dans ce TP, nous allons voir deux façons d'implémenter des ensembles.

1 Tableaux de booléens

Nous allons utiliser des sous-ensembles de $\llbracket 0; N-1 \rrbracket$ avec N grand. Pour faire des essais, on pourra prendre $N = 10$.

Un sous-ensemble de $\llbracket 0; N-1 \rrbracket$ est représenté par un tableau de booléens de taille N . Ainsi, pour un tableau v , l'entier n appartient à l'ensemble correspondant si et seulement si $v.(n)$ vaut `true`.

Question 1. Écrivez deux fonctions `tb_appartient` et `tb_inclus` de types respectifs `int -> bool vect -> bool` et `bool vect -> bool vect -> bool` qui déterminent respectivement si un entier appartient à un ensemble et si un ensemble est contenu dans un autre.

Question 2. Écrivez deux fonctions `tb_union` et `tb_intersection` qui calculent respectivement l'union et l'intersection de deux ensembles.

Question 3. Écrivez une fonction `tb_cardinal` qui renvoie le cardinal d'un ensemble.

2 Listes triées

En utilisant les listes, on peut représenter des ensembles de n'importe quel type. Mais les opérations sont plus faciles à programmer si on utilise un type ordonné, comme `int` ou `float`.

Ici, on va se restreindre aux ensembles d'entiers naturels. L'ensemble $\{1; 2; 0\}$ est représenté par la liste triée dans l'ordre croissant $[0; 1; 2]$.

Chaque élément n'est présent qu'une fois dans la liste, c'est-à-dire que la liste $[0; 0; 1]$ ne correspond pas à l'ensemble $\{0; 1\}$

Question 4. Écrivez une fonction `lt_est_ensemble` qui vérifie si une liste correspond bien à un ensemble (c'est-à-dire si elle est triée et sans éléments redondants).

Question 5. Écrivez deux fonctions `lt_appartient` et `lt_inclus` de types respectifs `int -> int list -> bool` et `int list -> int list -> bool` qui déterminent respectivement si un entier appartient à un ensemble et si un ensemble est contenu dans un autre.

Question 6. Écrivez deux fonctions `lt_union` et `lt_intersection` qui calculent respectivement l'union et l'intersection de deux ensembles.

Question 7. Écrivez une fonction `lt_cardinal` qui renvoie le cardinal d'un ensemble.

3 Comparatif

Avec les tableaux, on possède un test d'appartenance très rapide et facile à écrire. On les utilise généralement pour représenter un ensemble d'entiers fixé.

Avec les listes, on peut manipuler rapidement des sous-ensembles de petit cardinal inclus dans un ensemble très grand. En effet, pour les fonctions présentées ci-dessus, la mémoire utilisée et le temps d'exécution sont proportionnels à la taille totale des sous-ensembles.

Question 8. Écrivez une fonction itérative `tb_to_lt` qui transforme un tableau représentant un ensemble en une liste triée. On utilisera une boucle inconditionnelle.

Question 9. Écrivez une fonction itérative `lt_to_tb` de type `int -> int list -> bool vect` qui prend en argument un entier N et une liste triée d'entiers de $\llbracket 0; N-1 \rrbracket$, et qui renvoie le tableau correspondant.

4 Un problème « aveugle »

Dans toute cette section, pour représenter les ensembles, on utilisera des tableaux de taille $N + 1$ avec $N = 100, 200$ ou 10000 . On les visualisera avec la fonction `tb_to_lt`.

Un mathématicien choisit deux entiers $x \leq y$ appartenant à l'ensemble $E = \llbracket 2; 100 \rrbracket$. Il transmet la somme $S = x + y$ à Sophie et le produit $P = xy$ à Pierre. Ces deux derniers ne connaissent que l'ensemble E , et doivent retrouver le couple (x, y) .

S'ensuit alors le dialogue suivant :

Sophie : Tu ne peux pas résoudre le problème.

Pierre : Effectivement. Mais ce que tu viens de dire me permet de le résoudre.

Sophie : Et maintenant, je peux également trouver x et y .

Le but de cette section est de trouver x et y en se basant uniquement sur ce dialogue, sans connaître ni S ni P .

Point de vue théorique

Si l'on connaît S et P , alors x et y sont définis de manière unique comme les racines du polynôme $(X - x)(X - y) = X^2 - S \cdot X + P$ avec $x \leq y$.

Question 10. En utilisant une boucle conditionnelle, écrivez une fonction telle que `racines s p` renvoie le couple (x, y) .

Premier point de vue de Pierre

Question 11. On ne connaît que P . Écrivez une fonction telle que `sol1 p` renvoie l'ensemble des x tels que x et $y = P/x$ sont dans E .

Ainsi, Pierre ne peut résoudre le problème que si cet ensemble est de cardinal 1.

Premier point de vue de Sophie

Question 12. Étant donné S , écrivez les fonctions `sol1_uniques` et `sol1_multiples` qui prennent en argument un entier s et qui déterminent respectivement l'ensemble des x tels que xy ne se décompose que d'une façon et l'ensemble des x tels que xy se décompose en au moins deux façons. Notez que ces deux ensembles sont une partition de $\llbracket 2; \lfloor S/2 \rfloor \rrbracket$.

Ainsi si `sol1_uniques s` est vide, alors Sophie sait que Pierre ne peut pas résoudre le problème. De même, si `sol1_multiples s` est vide, alors Sophie sait que Pierre peut résoudre le problème.

Question 13. Écrivez une fonction `ensemble_s_possible` telle que `ensemble_s_possible ()` renvoie l'ensemble des S tels que Sophie peut savoir si Pierre ne peut pas résoudre le problème. On stockera alors l'ensemble E_s avec `let ensemble_s = ensemble_s_possible ();;`

Deuxième point de vue de Pierre

D'après la première remarque de Sophie, on sait maintenant que S est contenu dans l'ensemble E_s . Et donc Pierre le sait également.

Question 14. On ne connaît que P et E_s . Écrivez une fonction `sol2 p` qui renvoie l'ensemble des x tels que $P = xy$ et $S \in E_s$.

Pierre ne connaît la solution que si `sol2 p` est de cardinal 1.

Question 15. Écrivez une fonction `ensemble_p_possible` telle que `ensemble_p_possible ()` renvoie l'ensemble des P tels que Pierre peut résoudre le problème en sachant que $S \in E_s$. On stockera alors l'ensemble E_p avec `let ensemble_p = ensemble_p_possible ();;`

Deuxième point de vue de Sophie

D'après la remarque de Pierre, on sait maintenant que P est contenu dans E_p . Et donc Sophie le sait également.

Question 16. On ne connaît que S , E_s et E_p . Écrivez une fonction `sol3 s` qui renvoie l'ensemble des x tels que $S = x + y$, $S \in E_s$ et $P \in E_p$.

Sophie ne connaît la solution que si `sol3 s` est de cardinal 1.

Question 17. En déduire x et y .

Question 18. Au début de la section, on a pris $E = \llbracket 2; N \rrbracket$ avec $N = 100$. Quelle est la valeur maximale de N qui ne donne qu'une solution au problème ?

5 Calcul formel

Question 19. Écrivez une fonction `decompose` qui prend en argument un entier $n = p_1^{r_1} \cdots p_j^{r_j}$ et qui rend la liste des couples (p_i, r_i) .

Question 20. Écrivez une fonction `dim` de type `'a vect vect -> float * float`, qui prend une matrice en argument et qui renvoie son nombre de lignes et son nombre de colonnes. Si l'argument n'est pas une matrice (pensez au triangle de Pascal), la fonction renvoie $(-1, -1)$.

Question 21. Écrivez des fonctions pour les opérations suivantes sur les matrices : addition, multiplication, transposée, trace, déterminant, inverse, rang. On utilisera le type `float vect vect`.