Nombre de points des surfaces de Deligne-Lusztig

F. Rodier
Institut de Mathématiques de Luminy – C.N.R.S.
Marseille – France

Résumé

On étudie dans ce travail des exemples de surfaces algébriques sur un corps fini qui ont beaucoup de points relativement à leurs nombres de Betti et qui ont un groupe d'automorphismes important. Ces exemples sont construits à partir des variétés de Deligne-Lusztig.

Abstract

We present examples of algebraic surfaces on a finite field with many points with respect to their Betti numbers and with a large automorphism group. These examples are constructed from Deligne-Lusztig varieties.

Mots clefs — Surfaces de Deligne-Lusztig, nombre de Betti, fonction zêta, inegalité de Weil-Deligne, éclatement, surface hermitienne.

Classification de l'A.M.S. — Primaire : 14Q10, secondaire : 14F20, 14J25, 14J50, 94B27.

Table des matières

1 Introduction

On se propose ici d'étudier une classe de variétés sur un corps fini ayant beaucoup de points rationnels : les surfaces de Deligne-Lusztig.

Etant donné un corps fini k, un groupe réductif G défini sur k et l'application de Frobenius correspondante $F : G \longrightarrow G$, Deligne et Lusztig ont construit des variétés définies sur k. Leur idée initiale était de définir des représentations irréductibles des groupes G^F à l'aide de la cohomologie étale [D-L].

Il se trouve que les courbes de Deligne-Lusztig (associées aux groupes de rang relatif 1) ont de bonnes propriétés. Le nombre de points est maximal par rapport à leur genre. Ce qui fait qu'elles sont intéressantes aussi bien dans la théorie des courbes que dans la théorie des codes : elles fournissent en effet de bonnes courbes pour la construction des codes suivant la méthode de Goppa. Ces courbes ont été étudiées par J.P. Hansen [HaJ] et J-P Serre [Se].

De manière analogue, j'ai étudié les surfaces parmi ces variétés. Elles sont associées aux groupes de rang relatif 2. On trouve 7 types de surfaces lisses et irréductibles, rattachées aux groupes de type indécomposable A_2, C_2, G_2, ${}^2A_3$, ${}^2A_4$, ${}^3D_4$, ${}^2F_4$. Elles ont des propriétés intéressantes, en particulier elles ont beaucoup de points sur k (cette fois-ci relativement à leurs nombres de Betti b_1 et b_2). Dans cet article, on ne s'intéresse qu'au cas des surfaces de type A_2, C_2, ${}^2A_3$, ${}^2A_4$, ${}^2F_4$.

D'abord, il faut compactifier ces surfaces qui, comme elles ont été définies par Deligne et Lusztig, sont des surfaces affines. Une compactification projective et lisse de chacune de ces surfaces est définie à éclatements près. La construction de la compactification la plus simple dépend alors du type de la surface considérée.

Dans les cas simples (cf. §§ 5, 6, 7), on peut les compactifier dans un espace projectif de dimension 2 ou 3. J'obtiens ainsi diverses surfaces parmi lesquelles le plan projectif, une surface d'Hermite, une surface d'Hermite tordue.

J'ai ensuite complètement déterminé la fonction zêta de chacune des surfaces décrites, ce qui donne en particulier de manière explicite le nombre de points rationnels et les nombres de Betti. On trouve qu'elles ont beaucoup de points relativement à leurs nombres de Betti. Certaines surfaces atteignent la borne de Weil-Deligne généralisant la borne de Weil pour les variétés de dimension supérieure à 1.

J'ai étudié de manière plus approfondie les surfaces de type ${}^2A_4$ et ${}^2F_4$.

Pour les surfaces de type ${}^2A_4$ (§ 8), j'ai obtenu une surface que l'on peut décrire par désingularisation d'une intersection de deux hypersurfaces d'Hermite. Elle atteint la borne de Weil-Deligne. J'ai calculé le diviseur canonique de cette surface. J'en ai déduit :

1. qu'il n'y avait pas de droites exceptionnelles sur la surface X (elle est "minimale" au sens de la théorie des surfaces) ;
2. que la surface X est une surface "générale" (au sens de la classification des surfaces faite par Enriques et revue par E. Bombieri et D. Mumford [Mu] et [B-M]).

Pour les surfaces de type ${}^2F_4$ (§10) la borne de Weil-Deligne n'est pas atteinte. On peut cependant en déduire une surface singulière en contractant certaines droites, et montrer que cette surface atteint une borne maximale à l'aide des formules explicites de Weil.

Un des objectifs de cette étude est de construire des codes à partir de ces variétés suivant le procédé de Manin ([M-V]). Cette étude fera l'objet d'une autre publication.

Ce travail a fait l'objet d'une Note aux Comptes Rendus de L'Académie des Sciences [R]. On y trouvera également des résultats concernant les surfaces associées aux groupes de type G_2 et ${}^3D_4$. Il a été effectué en liaison avec M.A. Tsfasman et G. Lachaud qui ont étudié de manière générale le nombre de points des variétés sur un corps fini en fonction de la cohomologie de ces surfaces ([L-T] et [T]).

Enfin ce travail n'est qu'une lecture et un étoffement de celui de Lusztig [L1] et [L2]. Le lecteur reconnaîtra sans peine tout ce qui lui est dû. Ces variétés ont aussi déjà été étudiées par F. Digne et J. Michel [D-M], qui ont obtenu des résultats sur les fonctions zêta de ces variétés à l'aide de descentes de Shintani de certains caractères des groupes considérés. J'ai voulu ici obtenir des résultats plus explicites pour les surfaces de Deligne-Lusztig.

2 Préliminaires

Soient p un nombre premier, q une puissance de p qui sera définie précisément en 2.1.2, k le corps fini $\mathbb{F}_q$ et $\overline{k}$ une clôture algébrique du corps fini $\mathbb{F}_p$. Notons $g^{[q]}$ la matrice obtenue en élevant à la puissance q tous les coefficients de la matrice g dans $GL(n, \overline{k})$.
On considère l'espace vectoriel $V = \overline{k}^n$ et on désigne par $\mathbb{P}_{n-1}$ l'ensemble des sous-espaces de dimension 1 de V. On notera $(x_1 : \ldots : x_n)$ les coordonnées d'un point x de $\mathbb{P}_{n-1}$.
On notera $|X|$ le cardinal d'un ensemble X.

2.1 Les variétés de Deligne - Lusztig

Soient G un groupe algébrique réductif connexe défini sur k, B un sous-groupe de Borel de G et T un tore maximal de G contenu dans B.
Notons $X(T)$ l'ensemble des caractères algébriques de T dans $\overline{k}^*$. Rappelons qu'une *racine* α de G est un élément de $X(T)$ tel qu'il existe un sous-groupe à un paramètre $x_\alpha : \overline{k} \longrightarrow G$ qui vérifie $tx_\alpha(a)t^{-1} = x_\alpha(\alpha(t)a)$ pour tout t dans $\overline{k}$. Une racine est dite *positive* si $x_\alpha(\overline{k})\imath B$. Une racine est dite *simple* si elle n'est pas somme d'au moins deux racines positives.
Pour les propriétés fondamentales des groupes algébriques réductifs et de leurs systèmes de racines, on pourra se reporter à [C1], [C2] ou [Hu].

2.1.1 Position relative de deux sous-groupes de Borel.

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des sous-groupes de Borel de G.
Deligne et Lusztig ont défini le groupe de Weyl $\mathbf{W}$ de G et de l'ensemble S de ses générateurs canoniques à l'aide de limites inductives (cf.[D-L] (1.1)) : la donnée d'un sous-groupe de Borel B et d'un tore maximal T contenu dans B fixe l'isomorphisme canonique

$$\mathbf{W} \xrightarrow{\sim} N(T)/T$$

où $N(T)$ est le normalisateur de T dans G. La composée des applications

$$\mathbf{W} \longrightarrow N(T)/T \xrightarrow{\iota} B\backslash G/B \xrightarrow{(B,gB)} G\backslash(\mathcal{B}\times\mathcal{B})$$

est une bijection.

Deligne et Lusztig ont défini la notion suivante [D-L].

Définition 2.1 Si un couple (B_1, B_2) correspond à l'élément w de $\mathbf{W}$, on dira que B_1 et B_2 sont *en position relative* w, et on écrira

$$B_1 \xrightarrow{w} B_2.$$

Proposition 2.1 *Soient w_1 et w_2 deux éléments de $\mathbf{W}$ tels que $\ell(w_1)+\ell(w_2)=\ell(w_1w_2)$ où $\ell(w)$ est la longueur d'un élément w par rapport à S.*

Si $B_1 \xrightarrow{w_1} B'$ *et* $B' \xrightarrow{w_2} B_2$ *alors* $B_1 \xrightarrow{w_1w_2} B_2$

Si $B_1 \xrightarrow{w_1w_2} B_2$, *il existe un et un seul sous-groupe de Borel B' tel que*

$$B_1 \xrightarrow{w_1} B' \quad \text{et} \quad B' \xrightarrow{w_2} B_2.$$

Démonstration — Ce sont les propriétés de la décomposition de Bruhat (cf. [D-L] 1.2).

2.1.2 L'endomorphisme F

Soit F un endomorphisme de G dont une certaine puissance F^d soit l'endomorphisme de Frobenius relatif à une structure rationnelle de G sur un sous-corps fini k_0 de $\overline{k}$. Posant $q=|k_0|^{1/d}$, cela revient à dire qu'il existe un plongement de G dans un groupe $GL(n,\overline{k})$ tel que l'application F^d soit la restriction de l'endomorphisme $g \longmapsto g^{[q^d]}$ de $GL(n,\overline{k})$.
On notera G^F le groupe fini des éléments de G fixés par F.

2.1.3 Les schémas de Deligne-Lusztig

Définition 2.2 (cf. [D-L]). Soit w un élément de W. Le schéma de Deligne-Lusztig $X(w)$ est le sous-schéma localement fermé de $\mathcal{B}$ formé des sous-groupes de Borel B tels que B et FB soient en position relative w.

La proposition suivante donne une caractérisation de $X(w)$.

Proposition 2.2 *Fixons un sous-groupe de Borel B tel que $B=B^F$. Le schéma de Deligne-Lusztig $X(w)$ est isomorphe à*

$$\{x\in G \mid x^{-1}F(x)\in BwB\}/B.$$

Démonstration — En effet d'après la définition 2.1 les éléments xB et $F(x)B$ de G/B sont en position relative w si et seulement si B et $x^{-1}F(x)B$ le sont, c'est à dire si $x^{-1}F(x)\in BwB$.

2.1.4 Le cas des surfaces

Le groupe G admet un sous-groupe de Borel B et un tore T contenu dans B stables par F. L'endomorphisme F agit alors sur $N(T)/T$ et donc sur le groupe $\mathbf{W}$ et envoie S sur lui-même.

Nous nous intéresserons ici aux cas où S a deux orbites sous F. Si s_1 et s_2 sont des représentants de chacune de ces deux orbites, on pose $w = s_1 s_2$.

Proposition 2.3 *Le schéma de Deligne-Lusztig $X(w)$ est une variété lisse, irréductible, de dimension 2, stable par G^F, définie sur $\mathbf{F}_{q^\delta}$ où δ est le plus petit entier tel que F^δ fixe w.*

Démonstration — Le fait que $X(w)$ soit une variété lisse, de dimension 2 stable par G^F, est démontré dans [D-L] I.4 et XI. Le fait que $X(w)$ soit une variété irréductible est démontré dans [L1] prop 4.8. Comme F^δ fixe S, donc $\mathbf{W}$, il fixe aussi $X(w)$, donc $X(w)$ est définie sur $\mathbf{F}_{q^\delta}$.

2.2 Compactification lisse de $X(w)$

Soit $s_1 \dots s_n$ une expression minimale d'un élément de $\mathbf{W}$. On définit $\overline{X}(s_1, \dots, s_n)$ comme étant l'espace des suites de sous-groupes de Borel $(B_0, \dots, B_n)$ telles que

$$\begin{cases} B_n = F(B_0), \\ B_{i-1} \text{ et } B_i \text{ soient en position relative } s_i \text{ ou } e. \end{cases}$$

Lemme 2.1 *La variété $\overline{X}(s_1, \dots, s_n)$ est une compactification lisse de $X(w)$.*

Démonstration — Voir [D-L], lemme 9.11.

Lemme 2.2 *L'adhérence $\overline{X(w)}$ de $X(w)$ dans $\mathcal{B}$ est égale à la réunion des $X(s_{i_1} \dots s_{i_n})$, où les entiers $i_1, \dots i_s$ vérifient $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq n$*

Démonstration — Cela résulte du lemme précédent.

Lemme 2.3 *Soient s_1 et s_2 comme dans 2.1.4. Alors l'application*

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \overline{X}(s_1, s_2) & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ & (B_0, B_1, B_2) & \longmapsto & B_0 \end{array}$$

est un morphisme bijectif défini sur $\mathbf{F}_{q^\delta}$ de $\overline{X}(s_1, s_2)$ sur son image $\overline{X(s_1 s_2)} = X(s_1 s_2) \cup X(s_1) \cup X(s_2) \cup X(e)$.

Démonstration — Il est clair qu'une telle application est un morphisme défini sur $\mathbf{F}_{q^\delta}$. L'espace $\overline{X}(s_1, s_2)$ est l'espace des triplets (B_0, B_1, B_2) de sous-groupes de Borel tels que

$$\begin{cases} B_2 = F(B_0) \\ B_0 \text{ et } B_1 \text{ en position relative } w_1 \\ B_1 \text{ et } B_2 \text{ en position relative } w_2 \end{cases}$$

avec $w_1 = s_1$ ou e, $w_2 = s_2$ ou e. Donc B_0 est en position relative $w_1 w_2$ avec $B_2 = F(B_0)$ c'est-à-dire que B_0 appartient à l'ensemble $X(s_1s_2) \cup X(s_1) \cup X(s_2) \cup X(e)$ égal à $\overline{X(s_1s_2)}$ d'après le lemme 2.2.

Montrons réciproquement qu'un tel triplet est défini par son origine $B_0 \in X(s_1s_2) \cup X(s_1) \cup X(s_2) \cup X(e)$. En effet, d'une part $B_2 = F(B_0)$. D'autre part, distinguons quatre cas, suivant la position relative de B_0 et B_2 qui peut être s_1s_2, s_1, s_2 ou e.

- Si B_0 et B_2 sont en position relative s_1s_2, alors B_0 et B_1 doivent être en position relative s_1 et B_1 et B_2 doivent être en position relative s_2, et B_1 est uniquement déterminé par B_0 (cf. proposition 2.1).
- Si B_0 et B_2 sont en position relative s_1, B_0 et B_1 doivent être en position relative s_1 et B_1 et B_2 doivent être en position relative e, c'est-à-dire $B_1 = B_2$.
- De même si B_0 et B_2 sont en position relative s_1, on a $B_1 = B_0$.
- Enfin si B_0 et B_2 sont en position relative e, alors B_0 et B_1 doivent être en position relative e et B_1 et B_2 doivent être en position relative e, et on a $B_0 = B_1 = B_2$.

2.3 Sous-groupes paraboliques

2.3.1 Classification des sous-groupes paraboliques

On peut exprimer la classification des sous-groupes paraboliques comme suit (cf. [L1] 1.16). Soit $\mathcal{P}$ une classe de conjugaison de sous-groupes paraboliques. On note $\mathbf{W}(\mathcal{P})$ l'ensemble des w dans $\mathbf{W}$ tels qu'il existe deux sous-groupes de Borel B_1 et B_2 en position relative w et qui soient contenus dans le même sous-groupe P de la classe $\mathcal{P}$. Soit $S(\mathcal{P}) = \mathbf{W}(\mathcal{P}) \cap S$. Alors la correspondance $\mathcal{P} \longmapsto S(\mathcal{P})$ est une bijection entre l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes paraboliques de G et l'ensemble des parties de S.

Proposition 2.4 *Soient B un sous-groupe de Borel de G et T un tore maximal de G contenu dans B. Soit n_i un élément de $N(T)$ correspondant à s_i dans $S \imath \mathbf{W}$. Alors la classe $\mathcal{P}_i$ contenant le sous-groupe parabolique $B \cup Bn_iB$ est associée à la partie $\{s_i\}$ de S.*

Démonstration — Voir [D-L] 1.2.

Proposition 2.5 *Soit $\mathcal{P}_i$ la classe correspondant à s_i comme dans la proposition précédente. Pour que $B_1 \xrightarrow{s_i} B_2$ il faut et il suffit qu'il existe P dans $\mathcal{P}_i$ tel que $B_1 \cup B_2 \imath P$ et $B_1 \neq B_2$.*

Démonstration — Fixons un sous-groupe de Borel$B$ et un tore maximal T de G contenu dans B. D'après la définition 2.1, l'ensemble des B_1 tels que $B \xrightarrow{s_i} B_1$ est l'ensemble des gBg^{-1} avec $g \in Bn_iB = P_i - B$ où P_i est le sous-groupe parabolique engendré par B et n_i. Donc $B \cup B_1 \imath P_i$ et le sous-groupe P_i appartient à $\mathcal{P}_i$. Par conjugaison, on en déduit l'implication directe.

Réciproquement, si $B \cup B_1 \imath P'_i$ et $P'_i \in \mathcal{P}_i$, on ne peut avoir que $P'_i = P_i$ puisque P_i est le seul sous-groupe parabolique qui contienne B dans la classe $\mathcal{P}_i$, donc $B_1 = gBg^{-1}$ avec

$g \in P_i$. Comme $B_1 \neq B$ on a donc $B \xrightarrow{s_i} B_1$. De même que plus haut, par conjugaison, on établit l'implication réciproque.

2.3.2 Classification des classes de conjugaison stables par F de sous-groupes paraboliques

Soit S_F l'ensemble des orbites de F dans S et soit $S_F(\mathcal{P})$ l'image de $S(\mathcal{P})$ par la surjection canonique $S \longrightarrow S_F$. Alors la correspondance $\mathcal{P} \longmapsto S_F(\mathcal{P})$ est une bijection entre l'ensemble des classes de conjugaison stables par F de sous-groupes paraboliques de G et l'ensemble des parties de S_F (cf. [L1] 1.16).

2.3.3 Structure des classes de conjugaison

Si $P \in \mathcal{P}$ l'application

$$\begin{array}{rcl} G/P & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ gP & \longmapsto & gPg^{-1} \end{array}$$

est une bijection. Cela définit une structure de variété sur $\mathcal{P}$.

Soit $\mathcal{P}$ une classe de conjugaison stable par F de sous-groupes paraboliques. En utilisant le théorème de Lang-Steinberg [C2] on montre que si $P \in \mathcal{P}^F$ l'application

$$\begin{array}{rcl} G^F/P^F & \longrightarrow & \mathcal{P}^F \\ gP^F & \longmapsto & gPg^{-1} \end{array}$$

est une bijection. Par conséquent $|\mathcal{P}^F| = |G^F/P^F|$.

2.3.4 Structure des schémas $X(s_i)$

Proposition 2.6 *Soient*

- *s_i dans S et $\mathcal{P}_i$ la classe de conjugaison stable par F de sous-groupes paraboliques de G correspondant à l'image de s_i dans S_F ;*
- *P_i un élément de $\mathcal{P}_i^F$ et U_i le radical unipotent de P_i ;*
- *$X'(s'_i)$ la variété de Deligne-Lusztig associée au groupe P_i/U_i, à l'endomorphisme F, et à l'image s'_i de s_i dans le groupe de Weil $\mathbf{W}'_i$ de P_i/U_i.*

Alors $X(s_i)$ (resp. $\overline{X(s_i)}$) est isomorphe à la réunion disjointe de $|G^F/P_i^F|$ composantes isomorphes à $X'(s'_i)$ (resp. $\overline{X'(s'_i)}$). Le groupe G^F opère transitivement sur les composantes de $X(s_i)$ (resp. de $\overline{X(s_i)}$).

Démonstration — Pour $X(s_i)$, c'est le résultat de [L1] (1.17).

Le morphisme de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{P}_i$ qui à B fait correspondre l'unique sous-groupe P de $\mathcal{P}_i$ contenant B induit un morphisme de $\overline{X(s_i)}$ dans $\mathcal{P}_i$ dont l'image est dans $\mathcal{P}_i^F$. En effet, si $B \in X(s_i)$, on a $B \xrightarrow{s_i} FB$ donc $P \rfloor FB$ c'est-à-dire $F^{-1}P \rfloor B$ donc $P = FP$.

Si $P \in \mathcal{P}_i^F$, l'image réciproque de P dans $\overline{X(s_i)} = X(s_i) \cup X(e)$ est formée des B dans P tels que $B \xrightarrow{s_i} FB$, ou $B \xrightarrow{e} FB$, c'est-à-dire des B' dans P_i/U_i tels que $B' \xrightarrow{s_i} FB'$, ou $B' \xrightarrow{e} FB'$, c'est-à-dire $\overline{X'(s'_i)}$.

Les composantes de $X(s_i)$ (resp. de $\overline{X(s_i)}$) correspondent donc aux éléments de $\mathcal{P}_i$. Par conséquent, le groupe G^F opère transitivement sur celles-ci.

2.4 Cas du groupe $GL(n)$

Rappelons que $V = \overline{k}^n$. Soit $G = GL(n)$, P le sous-groupe parabolique de G stabilisant le point $(1 : 0 : \ldots : 0)$ de $\mathbf{P}_{n-1}$. L'application de G/P dans $\mathbf{P}_{n-1}$ qui à gP associe $g(1 : 0 : \ldots : 0)$ est alors un isomorphisme.

Définition 2.3 Un drapeau dans un espace vectoriel V est une chaîne de sous-espaces $0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_l = V$ tels que $V_i \neq V_{i-1}$. Un drapeau est dit *complet* si $l = \dim V$.

Proposition 2.7 *Pour tout sous-groupe de Borel B dans $GL(n)$, il existe un unique drapeau complet $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$ tel que B stabilise chaque V_i.*

Démonstration — C'est clair.

On identifiera librement les sous-groupes de Borel de $GL(n)$ avec les drapeaux correspondants.
Soit B le sous-groupe de Borel de G formé des matrices triangulaires supérieures. On considérera dans toute la suite la surjection naturelle $p : G/B \longrightarrow G/P$ qui envoie gB sur gP.

Proposition 2.8 *Le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} G/B & \xrightarrow{p} & G/P \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathbf{P}_n \\ B_1 & \longmapsto & V_1 \end{array}$$

où (V_i) est le drapeau associé à B_1 est commutatif.

Démonstration — C'est évident.

Soit T le tore maximal de G formé des matrices diagonales. Le groupe de Weil $\mathbf{W}$ de $GL(n)$ se relève en un sous-groupe de $N(T)$ qui consiste en permutations des vecteurs de la base canonique de V. Soit s_i l'élément de $\mathbf{W}$ correspondant à la transposition des vecteurs de rang i et $i+1$.

Lemme 2.4 *Si B_1 correspond au drapeau complet $V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1}$ et B_1' correspond au drapeau complet $V_1' \subset \ldots \subset V_{n-1}'$ on a $B_1 \xrightarrow{s_i} B_1'$ si et seulement si*

- $V_j = V_j'$ *pour* $i \neq j$
- $V_i \neq V_i'$.

Démonstration — C'est une conséquence de la proposition 2.5.

3 Nombre de points d'une surface

3.1 Formule de Lefschetz

Soit X une surface projective et lisse sur le corps k et soit $\mathbf{X} = X \times_k \overline{k}$ la surface correspondante sur $\overline{k}$ déduite de X par extension des scalaires de k à $\overline{k}$. Soit $F : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ le morphisme de Frobenius qui envoie le point de coordonnées x vers le point de coordonnées x^q. L'ensemble $\mathbf{X}^{F^n}$ des points fermés de $\mathbf{X}$ fixés par F^n s'identifie à l'ensemble $X(\mathbf{F}_{q^n})$ des points de X définis sur $\mathbf{F}_{q^n}$.

On pose $N_n = |X(\mathbf{F}_{q^n})|$. On peut calculer les nombres N_n à l'aide des groupes de cohomologie ℓ-adiques $H^i(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ qui sont définis pour $\ell \neq p$ (cf. par exemple [D]). Le morphisme F induit des endomorphismes

$$F^* : H^i(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_\ell) \to H^i(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_\ell).$$

La formule de Lefschetz s'écrit alors

$$N_n = \sum_{i=0}^{4} (-1)^i \operatorname{Tr}(F^{*n}, H^i(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_\ell)).$$

Soit b_i le $i^{\text{ème}}$ nombre de Betti de $\mathbf{X}$, c'est-à-dire la dimension sur $\mathbf{Q}_\ell$ de l'espace vectoriel $H^i(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_\ell)$. Soient $\alpha_{i,j}$ pour $1 \leq j \leq b_i$ les valeurs propres de F^* dans $H^i(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_\ell)$. D'après un théorème de Deligne [D], le polynôme caractéristique de F^* dans $H^i(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ est à coefficients entiers indépendants de ℓ et les $\alpha_{i,j}$ sont de valeur absolue complexe $|\alpha_{i,j}| = q^{i/2}$.

Le cup-produit définit une forme bilinéaire

$$H^i(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_\ell) \times H^{4-i}(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_\ell) \to \mathbf{Q}_\ell$$

qui est une dualité parfaite (dualité de Poincaré). Par conséquent $b_i = b_{4-i}$. On peut en déduire que les valeurs propres de F^* dans $H^{4-i}(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ sont les $q^2\alpha_{i,j}^{-1}$. En particulier, comme les $\alpha_{1,j}$ sont invariants par conjugaison complexe et que $|\alpha_{1,j}| = q^{1/2}$ on peut les réindexer de telle sorte que l'on ait $\alpha_{3,j} = q\alpha_{1,j}$.

Posons $\alpha_{i,j} = q^{i/2}\omega_{i,j}$, de telle sorte que $|\omega_{i,j}| = 1$. Supposons maintenant que $\mathbf{X}$ est connexe, on a donc $b_0 = b_4 = 1$. La formule de Lefschetz se réécrit alors

$$N_n = 1 + q^{2n} - (q^{n/2} + q^{3n/2}) \sum_{1}^{b_1} \omega_{1,j}^n + q^n \sum_{1}^{b_2} \omega_{2,j}^n. \tag{1}$$

En particulier

$$N_1 = 1 + q^2 - (q^{1/2} + q^{3/2}) \sum_{1}^{b_1} \omega_{1,j} + q \sum_{1}^{b_2} \omega_{2,j}.$$

D'où l'inégalité de Weil-Deligne :

$$N_1 \leq 1 + q^2 + b_1(q^{1/2} + q^{3/2}) + b_2 q.$$

On dit que la surface X atteint la borne de Weil-Deligne si

$$N_1 = 1 + q^2 + b_1(q^{1/2} + q^{3/2}) + b_2 q$$

c'est-à-dire si, pour tout j,

$$\omega_{1,j} = -1 \quad \text{et} \quad \omega_{2,j} = 1.$$

3.2 Fonction zêta

Une autre manière d'exprimer cela est de former la fonction Z de X sur $\mathbf{F}_q$. C'est la série

$$Z(t) = \exp\Big(\sum_{r=1}^{\infty} N_r \frac{t^r}{r}\Big).$$

On vérifie qu'elle est égale à

$$Z(t) = \frac{P_1(t)P_3(t)}{P_0(t)P_2(t)P_4(t)}$$

avec

$$P_i(t) = \det(1 - F^*t, H^i(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_\ell)) = \prod_{j=1}^{b_i}(1 - q^{i/2}\omega_{i,j}t)$$

(cf. [D] 1.5).

Lemme 3.1 *La borne de Weil-Deligne est atteinte si*

$$P_i(t) = (1 - (-1)^i q^{i/2} t)^{b_i}.$$

Démonstration — C'est clair.

3.3 Les formules explicites pour les surfaces

Soit

$$v = (v_n)_{n \geq 1}$$

une suite de réels presque tous nuls et soit

$$f_v(\theta) = 1 + 2\sum_1^{\infty} v_n \cos n\theta.$$

On suppose

$$\begin{array}{lll} a) & v_n \geq 0 & \text{pour} \quad n \geq 1 \\ b) & f_v(\theta) \geq 0 & \text{quel que soit } \theta \in \mathbf{R} \end{array}$$

Soit $(\omega_j)_{1 \leq j \leq b}$ une suite de complexes, stable par conjugaison, telle que $|\omega_j| = 1$ et soient

$$S_n = -\sum_{j=1}^{b} \omega_j^n \quad \text{et} \quad \omega_j = e^{i\phi_j}.$$

Proposition 3.1 *Les sommes S_n vérifient*

$$\sum_1^\infty v_n S_n = \frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^b f_v(\phi_j) \leq \frac{b}{2}.$$

Démonstration — On a

$$0 \leq \sum_{j=1}^b f_v(\phi_j) = b + 2\sum_{j=1}^b (\sum_1^\infty v_n \cos n\phi_j) = b + \sum_{n=1}^\infty v_n \sum_{j=1}^b (\omega_j^n + \overline{\omega_j^n}) = b - 2\sum_{n=1}^\infty v_n S_n.$$

Les surfaces non singulières vérifient une formule du type (1). C'est aussi le cas de certaines surfaces singulières (cf. §10).

Posons $\quad \chi_v(t) = \sum_1^\infty v_n \frac{t^n}{t^{n/2} + t^{-n/2}} \quad$ et $\quad S_{i,n} = -\sum_{j=1}^b \omega_{i,j}^n.$

On peut montrer la proposition suivante, démontrée dans le cas général par Lachaud et Tsfasman (cf. [L-T]).

Proposition 3.2 *On a $N_1 \leq N_{\max}$ avec*

$$(N_{\max} - 1)\chi_v(q^{-1}) = \frac{b_1}{2} - \sum_1^\infty v_n \frac{1}{q^{-n/2} + q^{n/2}} S_{2,n} + \chi_v(q).$$

Le nombre $N_{\max}$ est une borne supérieure pour le nombre de points que peut avoir une surface vérifiant une formule du type (1) avec les $\omega_{1,j}$ quelconques, et les $\omega_{2,j}$ donnés.

Démonstration — La formule de Lefschetz peut se réécrire

$$S_{1,n} = (N_n - 1 + q^n S_{2,n})\frac{1}{q^{n/2} + q^{3n/2}} - \frac{q^{2n}}{q^{n/2} + q^{3n/2}}$$

et donc

$$S_{1,n} \geq (N_1 - 1 + q^n S_{2,n})\frac{1}{q^{n/2} + q^{3n/2}} - \frac{q^{2n}}{q^{n/2} + q^{3n/2}}$$

car $N_1 \leq N_n$. On multiplie les deux membres par v_n et on fait la somme pour n allant de 1 jusqu'à l'infini :

$$\begin{aligned}
\sum_1^\infty v_n S_{1,n} &\geq (N_1 - 1)\sum_1^\infty v_n \frac{1}{q^{n/2} + q^{3n/2}} + \sum_1^\infty v_n \frac{q^n}{q^{n/2} + q^{3n/2}} S_{2,n} - \sum_1^\infty v_n \frac{q^{2n}}{q^{n/2} + q^{3n/2}} \\
&\geq (N_1 - 1)\sum_1^\infty v_n \frac{q^{-n}}{q^{-n/2} + q^{n/2}} + \sum_1^\infty v_n \frac{1}{q^{-n/2} + q^{n/2}} S_{2,n} - \sum_1^\infty v_n \frac{q^n}{q^{-n/2} + q^{n/2}} \\
&\geq (N_1 - 1)\chi_v(q^{-1}) + \sum_1^\infty v_n \frac{1}{q^{-n/2} + q^{n/2}} S_{2,n} - \chi_v(q).
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{b_1}{2} \geq (N_1 - 1)\chi_v(q^{-1}) + \sum_1^\infty v_n \frac{1}{q^{-n/2} + q^{n/2}} S_{2,n} - \chi_v(q)$$

d'après la proposition 3.1.

4 Calcul de la fonction Z

Soit $w = \prod s_i$, où le produit est étendu à un élément de chaque orbite de F dans S. On dira alors que w est *un élément de Coxeter* de $\mathbf{W}$ relativement à F. On dira que T est un *tore de Coxeter* s'il existe un sous-groupe de Borel $B \supset T$ tel que B et $F(B)$ soient en position relative w.

Lusztig a montré le résultat suivant (cf. Théorème 6.1 de [L1]). On note $H_c^i(X(w), \mathbf{Q}_\ell)$ l'espace de cohomologie ℓ-adique de $X(w)$ à supports propres.

Théorème 4.1 *Soient G et F comme dans le § 2.1, $w = \prod s_i$ un élément de Coxeter. Alors :*

1. *F^δ est un automorphisme semi-simple de $\bigoplus_i H_c^i(X(w), \mathbf{Q}_l)$;*
2. *Il a h valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$, données par [L1] (table pp. 146-7) ;*
3. *Si T est un tore de Coxeter,*

$$\sum_{s=1}^{\infty} |X(w)^{F^{\delta s}}| t^s = |G^F||T^F|^{-1} t^h \prod_j (1 - t\lambda_j)^{-1}.$$

La formule 3 permet de calculer à l'aide du lemme 2.3 la somme $\sum_{s=1}^{\infty} |\overline{X(s_1 s_2)}^{F^{\delta s}}| t^s$.

On a en effet

$$\overline{X(s_1 s_2)} = X(s_1 s_2) \cup X(s_1) \cup X(s_2) \cup X(e).$$

Le calcul des $X(s_i)$ se fait grâce à un argument d'induction de Lusztig (cf. proposition 2.6).

Soit Z la fonction zêta de la variété $\overline{X}(s_1, s_2)$ sur $\mathbf{F}_{q^\delta}$. On a

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\overline{X(s_1 s_2)}^{F^{\delta s}}| t^s = \sum_{s=1}^{\infty} |\overline{X}(s_1, s_2)^{F^{\delta s}}| t^s = t \frac{Z'}{Z} = t(\log Z)'.$$

5 Cas A_2

5.1 Définition

Prenons

$$n = 3, \quad G = GL(3, \overline{k}), \quad F : g \longmapsto g^q.$$

Le groupe de Weil $\mathbf{W}$ de G est isomorphe au groupe des symétries des trois vecteurs de base de $\overline{k}^3$, et S est formée de deux éléments s_1 (transposition des deux premiers vecteurs) et s_2 (transposition des deux derniers vecteurs). Cf. §2.4.

Ces données permettent de considérer la surface $\overline{X}(s_1, s_2)$. Pour l'étudier, on va définir une application de cette surface dans le plan projectif $\mathbf{P}_2$ par restriction de l'application $p : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbf{P}_2$ définie dans la proposition 2.8.

5.2 Une filtration de $\mathbf{P}_2$

Rappelons que les points de $\mathbf{P}_2$ sont les droites L de $\overline{k}^3$ passant par l'origine.
Définissons les parties suivantes Y_i de $\mathbf{P}_2$:

$\overline{Y}_0$ est l'ensemble des droites L telles que $L = FL$;
$\overline{Y}_1$ est l'ensemble des droites L telles que $L,\ FL$ et F^2L soient dans le même plan de $\overline{k}^3$;
$\overline{Y}_2 = \mathbf{P}_2$.

Posons $Y_0 = \overline{Y}_0$, $Y_1 = \overline{Y}_1 - Y_0$ et $Y_2 = \overline{Y}_2 - \overline{Y}_1 = Y$. Alors, clairement
– $\overline{Y}_0 \subset \overline{Y}_1 \subset \overline{Y}_2 = \overline{Y}$.
– $Y_0 \cup Y_1 \cup Y_2 = \overline{Y}$ où la réunion est disjointe.
– $Y_0 = G^F/P^F = \mathbf{P}_2(k)$.

5.3 Application de $\overline{X(s_1s_2)}$ sur $\mathbf{P}_2$

Rappelons qu'on identifie les sous-groupes de Borel B aux drapeaux complets (V_1, V_2) correspondants.

Proposition 5.1 *La surface $X(s_1s_2)$ correspond à l'ensemble des drapeaux (V_1, V_1+FV_1) où V_1 est dans Y_2. La restriction de p à $X(s_1s_2)$ est un isomorphisme d'image Y_2 donné par*

$$\begin{array}{ccc} X(s_1s_2) & \longrightarrow & Y_2 \\ (V_1, V_1+FV_1) & \longmapsto & V_1. \end{array}$$

Démonstration — Montrons que si $B \in X(s_1s_2)$ alors $V_2 = V_1 \oplus FV_1$. En effet, FB correspond au drapeau complet (FV_1, FV_2) et si $B \xrightarrow{s_1s_2} FB$ il existe un sous-groupe de Borel B' tel que $B \xrightarrow{s_1} B'$ et $B' \xrightarrow{s_2} FB$. Si B' correspond au drapeau complet (V_1', V_2') on a donc

$$\left\{ \begin{array}{ll} V_1 & \neq V_1' \\ V_2 & = V_2' \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} V_1' & = FV_1 \\ V_2' & \neq FV_2 \end{array} \right.$$

d'où $V_1 \neq V_1' = FV_1$, $V_1' \imath V_2' = V_2$. Donc V_1 et V_1' sont des sous-espaces distincts de V_2, donc $V_2 = V_1 \oplus V_1' = V_1 \oplus FV_1$. De plus $V_1 \in Y_2$ car $V_2 \neq FV_2$.

La réciproque est claire. En effet si $V_1 \in Y_2$ et si $V_2 = V_1 \oplus FV_1$ alors $B \in X(s_1s_2)$, car

$$(V_1, V_1 \oplus FV_1) \xrightarrow{s_1} (FV_1, V_1 \oplus FV_1) \xrightarrow{s_2} (FV_1, FV_1 \oplus F^2V_1)$$

puisque $V_1 \neq FV_1$ et $V_1 \oplus FV_1 \neq FV_1 \oplus F^2V_1$ donc

$$(V_1, V_1 \oplus FV_1) \xrightarrow{s_1s_2} (FV_1, FV_1 \oplus F^2V_1)$$

d'après la proposition 2.1.
Remarquons enfin que $V_1 \mapsto (V_1, V_1 + FV_1)$ est clairement un morphisme, ainsi que son inverse.

Proposition 5.2 *Le morphisme p envoie $\overline{X(s_2)} = X(s_2) \cup X(e)$ sur Y_0. L'image réciproque d'un point de Y_0 dans $\overline{X(s_2)}$ est une courbe rationnelle.*

Démonstration — Montrons que si $B \in X(s_2)$ alors $V_1 = FV_1$. En effet (FV_1, FV_2) est le drapeau associé à FB et si $B \xrightarrow{s_2} FB$ on a d'après le lemme 2.4

$$\begin{cases} V_1 & = FV_1 \\ V_2 & \neq FV_2. \end{cases}$$

De plus l'image réciproque d'un point de Y_0 représenté par V_1 est formée de l'ensemble des drapeaux (V_1, V_2) tels que $V_2 \supset V_1$. Son image dans $\mathbf{P}_2$ est un pinceau de droites passant par un point rationnel, donc est isomorphe à une droite rationnelle.

Proposition 5.3 *Le morphisme p induit un isomorphisme*

$$X(s_1) \longrightarrow Y_1.$$

Démonstration — Montrons que si $B \in X(s_1)$ alors $V_2 = V_1 \oplus FV_1$ et $V_1 \in Y_1$. En effet (FV_1, FV_2) est le drapeau associé à FB et si $B \xrightarrow{s_1} FB$, le lemme 2.4 donne

$$\begin{cases} V_1 & \neq FV_1 \\ V_2 & = FV_2 \end{cases}$$

Donc V_2 contient V_1 et FV_1, par conséquent $V_2 = V_1 \oplus FV_1$. D'autre part $V_2 = FV_2$ c'est-à-dire $V_1 \oplus FV_1 = FV_1 \oplus F^2V_1$ donc $F^2V_1 \subset V_1 \oplus FV_1$ et par conséquent $V_1 \in Y_1$.
Réciproquement, $V_1 \longmapsto (V_1, V_1 \oplus FV_1)$ est évidemment un morphisme.

Théorème 5.1 *On obtient le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathcal{B} & \supset & \overline{X(s_1s_2)} & = & X(s_1s_2) & \cup & X(s_1) & \cup & X(s_2) \cup X(e) \\
{\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow {\scriptstyle \textit{par contraction de } \mathbf{P}_1} \\
\mathbf{P}_2 & = & \overline{Y} & = & Y_2 & \cup & Y_1 & \cup & Y_0 = G^F/P^F
\end{array}$$

Le schéma $\overline{X}(s_2)$ est constitué de $|G^F/P^F| = q^2+q+1$ courbes $\mathbf{P}_1$. La surface de Deligne-Lusztig $\overline{X}(s_1, s_2)$ est obtenue à partir de $\mathbf{P}_2$ par éclatement des points de $\mathbf{P}_2(\mathbf{F}_q)$.

Démonstration — L'application $\overline{X}(s_1, s_2) \xrightarrow{p\circ\phi} \overline{Y}$ est un morphisme birationnel de surfaces non singulières. Il est donc donné par des éclatements (cf. [Har], p. 411). Il se factorise par

$$\overline{X}(s_1, s_2) \longrightarrow \overline{X(s_1s_2)} \longrightarrow \overline{Y}$$

où la première application est bijective. Les seuls éclatements sont donc au-dessus de Y_0, donc ailleurs $\overline{X}(s_1, s_2) \longrightarrow \overline{Y}$ est un isomorphisme local.

5.4 Fonction zêta

On a donc le résultat suivant.

Théorème 5.2 *La fonction zêta de $\overline{Y}$ est égale à*

$$Z(t) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)(1-q^2t)}.$$

C'est clair.

6 Cas $^2A_3$

6.1 Définition

Prenons
$$n = 4, \quad G = SL(4, \overline{k}) \quad F \ : g \mapsto {}^t(g^{[q]})^{-1}.$$

Alors G^F est le groupe qui fixe la forme sesquilinéaire hermitienne suivante dans $(\mathbf{F}_{q^2})^4$:

$$(x, y) \longrightarrow \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i^q.$$

La forme $\langle\, .\, , .\, \rangle$ s'étend à $V = \overline{k}^4$ en une forme sesquilinéaire par rapport à l'automorphisme $\lambda \longmapsto \lambda^q$ de $\overline{k}$. Pour un sous-espace V' de V, on définit son orthogonal $V'^{\perp}$ comme étant l'ensemble des éléments x de V tels que $\langle x, V'\rangle = 0$. Alors on vérifie que $(V'^{\perp})^{\perp} = F^2V'$. On vérifie facilement que si un sous-groupe de Borel B correspond au drapeau (V_1, V_2, V_3), le sous-groupe de Borel FB correspond au drapeau $(V_3^{\perp}, V_2^{\perp}, V_1^{\perp})$.
Le groupe de Weil $\mathbf{W}$ est isomorphe au groupe des symétries des quatre vecteurs de la base canonique de V, et $\mathbf{S}$ est formé des trois éléments s_i (transposition des vecteurs de rang i et $i+1$) avec $1 \leq i \leq 3$ (cf. 2.4). L'endomorphisme F échange s_1 avec s_3 et conserve s_2. Voir [C2], chapitre 1. On définit les classes de conjugaison stables par F de sous-groupes paraboliques $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ associées aux classes $\{s_1, s_3\}$ et $\{s_2\}$ comme dans le paragraphe 2.3.1. On a ([C2], chapitre 2)

$$|\mathcal{P}_1^F| = (q^3+1)(q+1) \quad \text{et} \quad |\mathcal{P}_2^F| = (q^3+1)(q^2+1).$$

6.2 Une filtration d'une surface hermitienne

Munissons $V = \overline{k}^4$ de l'application de Frobenius $F^2 : (x_i)_{1\leq i\leq 4} \to (x_i^{q^2})_{1\leq i\leq 4}$.
La variété $\overline{Y}$1$\mathbf{P}_3$ définie par l'équation $\langle L, L\rangle = 0$ (où L est une droite de $\overline{k}^4$ passant par l'origine, définissant un point de $\mathbf{P}_3$) est une surface hermitienne.
Soit la filtration de $\overline{Y}$:

$\overline{Y}_0$	est l'ensemble des droites L telles que	$\langle L, L\rangle = 0, L = F^2L$
$\overline{Y}_1$	est l'ensemble des droites L telles que	$\langle L, L\rangle = 0, \langle L, F^2L\rangle = 0,$
$\overline{Y} = \overline{Y}_2$	est l'ensemble des droites L telles que	$\langle L, L\rangle = 0.$

Posons $Y_0 = \overline{Y}_0$, $Y_1 = \overline{Y}_1 - Y_0$ et $Y_2 = \overline{Y}_2 - \overline{Y}_1 = Y$. Alors :
– $Y_0 = \overline{Y}_0 \subset \overline{Y}_1 \subset \overline{Y}_2 = \overline{Y}$.
– $Y_0 \cup Y_1 \cup Y_2 = \overline{Y}$.
– Y_0 est l'ensemble des points rationnels de la surface hermitienne $\overline{Y}$.

6.3 Application de $\overline{X(s_1 s_2)}$ dans $\mathbf{P}_3$

Proposition 6.1 *La surface $X(s_1 s_2)$ correspond à l'ensemble des drapeaux $(L, L \oplus F^2 L, L^{\perp})$ où L est un élément de $\mathbf{P}_3$ contenu dans Y. La restriction de p à $X(s_1 s_2)$ est un isomorphisme dont l'image est Y. Elle est donnée par*

$$\begin{array}{ccc} X(s_1 s_2) & \longrightarrow & Y \\ (L, L \oplus F^2 L, L^{\perp}) & \longmapsto & L. \end{array}$$

Démonstration — La variété $X(s_1 s_2)$ est formée de l'ensemble des sous-groupes de Borel B tels que $B \xrightarrow{s_1 s_2} FB$. Un sous-groupe de Borel B correspond au drapeau (V_1, V_2, V_3) et FB correspond au drapeau $(V_3^{\perp}, V_2^{\perp}, V_1^{\perp})$. Pour qu'un sous-groupe de Borel B vérifie $B \xrightarrow{s_1 s_2} FB$, il faut et il suffit qu'il existe un sous-groupe de Borel B' tel que $B \xrightarrow{s_1} B'$ et $B' \xrightarrow{s_2} FB$, c'est-à-dire qu'il existe un drapeau (V_1', V_2', V_3') tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} V_1 & \neq V_1' \\ V_2 & = V_2' \\ V_3 & = V_3' \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} V_1' & = V_3^{\perp} \\ V_2' & \neq V_2^{\perp} \\ V_3' & = V_1^{\perp} \end{array} \right. .$$

Ces équations impliquent d'une part $(V_1', V_2', V_3') = (V_3^{\perp}, V_2, V_3)$ donc, puisque (V_1', V_2', V_3') est un drapeau $V_3^{\perp} = V_1' \imath V_2' = V_2$. D'autre part elles impliquent $V_3^{\perp} = V_1' \neq V_1$ et $V_3 = V_3' = V_1^{\perp}$ donc le sous-espace V_2 de dimension 2 contient les droites V_1 et $V_3^{\perp}$ qui sont distinctes. Finalement

$$\left\{ \begin{array}{ll} V_2 & = V_1 \oplus V_3^{\perp} = V_1 \oplus (V_1^{\perp})^{\perp} = V_1 \oplus F^2 V_1 \\ V_3 & = V_3' = V_1^{\perp} \end{array} \right.$$

ou encore $(V_1, V_2, V_3) = (L, L \oplus F^2 L, L^{\perp})$ où L est une droite de V passant par l'origine. Comme $(L, L \oplus F^2 L, L^{\perp})$ est un drapeau on a $L \imath L^{\perp}$ et $L \neq F^2 L$ ce qui implique $\langle L, L \rangle = 0$ et $L \neq F^2 L$.
D'autre part, $V_2 \neq V_2^{\perp}$ c'est-à-dire $L \oplus F^2 L \neq (L \oplus F^2 L)^{\perp}$. D'après le lemme 6.1 ci-dessous, c'est équivalent à $\langle L, F^2 L \rangle \neq 0$ donc $L \in Y$.

Il est clair réciproquement que si $L \in \mathbf{P}_3$ et est telle que $\langle L, L \rangle = 0$, $\langle L, F^2 L \rangle \neq 0$, on a

$$\begin{array}{ll} (L, L \oplus F^2 L, L^{\perp}) & \\ \xrightarrow{s_1} (F^2 L, L \oplus F^2 L, L^{\perp}) & \text{car } L \neq F^2 L \\ \xrightarrow{s_2} (F^2 L, (L \oplus F^2 L)^{\perp}, L^{\perp}) & \text{par le lemme 6.1 ci-dessous.} \end{array}$$

Le drapeau complet $(L, L \oplus F^2 L, L^{\perp})$ correspond au sous-groupe de Borel B. Le drapeau complet correspondant à FB est alors

$$((L^{\perp})^{\perp}, (L \oplus F^2 L)^{\perp}, L^{\perp}) = (F^2 L, (L \oplus F^2 L)^{\perp}, L^{\perp}),$$

donc

$$B \xrightarrow{s_1 s_2} FB.$$

Remarquons enfin que $L \mapsto (L, L \oplus F^2 L, L^{\perp})$ est clairement un morphisme, ainsi que son inverse.

Lemme 6.1 *Si L est une droite dans V telle que $L \neq F^2L$ et que $L \oplus F^2L\imath L^\perp$ alors pour que $L \oplus F^2L = (L \oplus F^2L)^\perp$ il faut et il suffit que $\langle L, F^2L\rangle = 0$.*

Démonstration — On a $(L \oplus F^2L)^\perp = L^\perp \cap (F^2L)^\perp$. Comme $L \oplus F^2L$ et $L^\perp \cap (F^2L)^\perp$ sont de dimension 2, ils sont égaux si et seulement si

$$L \oplus F^2L\imath L^\perp \cap (F^2L)^\perp \tag{2}$$

Or $L \oplus F^2L\imath L^\perp$, donc la relation (2) équivaut à $L \oplus F^2L\imath(F^2L)^\perp$. Or $L\imath L^\perp$. Si $x, y \in L$ on a donc $\langle x, y\rangle = 0$, d'où $\langle F^2x, F^2y\rangle = \langle x, y\rangle^{q^2} = 0$ par conséquent $F^2L\imath F^2L^\perp$. Donc la relation (2) équivaut en fait à $L\imath(F^2L)^\perp$ c'est-à-dire à $\langle L, F^2L\rangle = 0$.

Proposition 6.2 *Le morphisme p envoie $\overline{X(s_2)} = X(s_2) \cup X(e)$ sur Y_0.*

Démonstration — Le sous-groupe de Borel B correspond au drapeau (V_1, V_2, V_3). Montrons que si $B \in \overline{X(s_2)}$ alors $V_1 = F^2V_1$. En effet, FB correspond au drapeau $(V_3^\perp, V_2^\perp, V_1^\perp)$ et si $B \xrightarrow{s_2} FB$ ou si $B \xrightarrow{e} FB$ on a d'après le lemme 2.4

$$V_1 = V_3^\perp = (V_1^\perp)^\perp = F^2V_1.$$

Proposition 6.3 *L'image réciproque d'un point de Y_0 par le morphisme p est une courbe rationnelle.*

Démonstration — L'image réciproque d'un point de Y_0 est formée de l'ensemble des sous-groupes de Borel B tels que $B \xrightarrow{s_2} FB$ ou $B = FB$. Donc l'image réciproque d'un point de Y_0 représenté par V_1 est formée de l'ensemble des drapeaux (V_1, V_2, V_3) avec V_1 donné, tels que $V_3 = V_1^\perp$ c'est-à-dire isomorphe à l'ensemble des V_2 tels que $V_1\imath V_2\imath V_1^\perp$ ou encore au pinceau des plans dans $V_1^\perp$ passant par V_1, c'est-à-dire à une courbe rationnelle.

Proposition 6.4 *Le morphisme p induit un isomorphisme de $X(s_1)$ sur Y_1 donné par*

$$\begin{array}{ccc} X(s_1) & \longrightarrow & Y_1 \\ (L, L \oplus F^2L, L^\perp) & \longmapsto & L. \end{array}$$

Démonstration — La démonstration va se faire en plusieurs étapes.

Etape 1

$$p(X(s_1))\imath Y_1$$

Le sous-groupe de Borel B correspond au drapeau (V_1, V_2, V_3). Montrons que si $B \in X(s_1)$ alors $V_1 \in Y_1$. Si $B \xrightarrow{s_1} FB$, le lemme 2.4 implique

$$\begin{cases} V_1 & \neq V_3^\perp \\ V_2 & = V_2^\perp \\ V_3 & = V_1^\perp \end{cases}$$

d'où $V_2 = (V_2^\perp)^\perp = F^2V_2$ donc $F^2V_1\imath F^2V_2 = V_2$ et comme V_2 est isotrope car $V_2\imath V_2^\perp$ on a

$$\langle V_1, V_1\rangle = 0, \qquad \langle V_1, F^2V_1\rangle = 0$$

c'est-à-dire $V_1 \in \overline{Y}_1$. De plus $V_1 \not Y_0$ car $V_1 \neq V_3^\perp = (V_1^\perp)^\perp = F^2V_1$.

Etape 2 *L'image réciproque d'un point de Y_1 dans $X(s_1)$ par le morphisme p est formée d'au plus un point.*

En effet, si le drapeau (V_1, V_2, V_3) est dans $X(s_1)$, on voit que V_1 et F^2V_1 sont des sous-espaces de V_2 et $V_1 \neq F^2V_1$ donc $V_2 = V_1 \oplus F^2V_1$. D'autre part $V_3 = V_1^{\perp}$, donc le drapeau (V_1, V_2, V_3) est bien déterminé par V_1.

Etape 3 *L'application réciproque de p est le morphisme*

$$L \mapsto (L, L + F^2L, L^{\perp}),$$

de Y_1 dans $X(s_1)$

On associe à la droite L représentant un point de $\mathbf{P}_3$, et telle que

$$\langle L, L\rangle = 0 \quad , \quad \langle L, F^2L\rangle = 0 \quad \text{et} \quad L \neq F^2L$$

le drapeau $(L, L + F^2L, L^{\perp})$ correspondant à B. En effet $\langle L, L\rangle = 0$ et $\langle L, F^2L\rangle = 0$ impliquent $L + F^2L\wr L^{\perp}$.
Le drapeau correspondant à FB est alors

$$((L^{\perp})^{\perp}, (L + F^2L)^{\perp}, L^{\perp}) = (F^2L, (L + F^2L)^{\perp}, L^{\perp})$$

car $(L^{\perp})^{\perp} = F^2L$.
On a

$$(L, L + F^2L, L^{\perp}) \xrightarrow{s_1} (F^2L, L + F^2L, L^{\perp}) = (F^2L, (L + F^2L)^{\perp}, L^{\perp})$$

car $L + F^2L = (L + F^2L)^{\perp}$ puisque $\langle L, F^2L\rangle = 0$ d'après le lemme 6.1.

Théorème 6.1 *On obtient le diagramme commutatif suivant défini sur $\mathbf{F}_{q^2}$.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{B} & \supset & \overline{X(s_1s_2)} & = & X(s_1s_2) & \cup & X(s_1) & \cup & X(s_2) \cup X(e) \\
{\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow\wr & & \big\downarrow\wr & & \big\downarrow \text{par contraction de courbes rationnelles} \\
\mathbf{P}_3 & \supset & \overline{Y} & = & Y_2 & \cup & Y_1 & \cup & Y_0
\end{array}$$

Le sous-schéma $\overline{X}(s_2)$ est constitué de $|Y_0|$ courbes rationnelles et la surface de Deligne-Lusztig $\overline{X}(s_1, s_2)$ est obtenue à partir de $\overline{Y}$ par éclatement des points de Y_0.
Le groupe G^F opère transitivement sur les courbes rationnelles composantes connexes de $\overline{X}(s_1)$ et sur les courbes rationnelles composantes connexes de $\overline{X}(s_2)$.

Comme plus haut, $\overline{X}(s_1, s_2) \longrightarrow \overline{Y}$ est un morphisme birationnel, donc donné par des éclatements (cf. [Har], p. 411). Les seuls éclatements sont au-dessus de Y_0, donc ailleurs $\overline{X}(s_1, s_2) \longrightarrow \overline{Y}$ est un isomorphisme local. La proposition 2.6 montre la dernière partie du théorème.

Proposition 6.5 *La surface $\overline{Y}$ a $(q^3 + 1)(q^2 + 1)$ points définis sur $\mathbf{F}_{q^2}$ dont l'ensemble est égal à Y_0.*

Démonstration — On peut voir ce calcul dans l'article de Tsfasman [T].

Lemme 6.2 *Le schéma $\overline{X}(s_1)$ est réunion disjointe de $|\mathcal{P}_1^F|$ courbes rationnelles. Le schéma $\overline{Y}_1$ est réunion de $|\mathcal{P}_1^F|$ droites de $\mathbf{P}_3$ se coupant en des points de Y_0. Par chaque point de Y_0 passent $q+1$ droites.*

Démonstration — La première assertion se déduit de la proposition 2.6.

Par projection, $\overline{Y}_1$ est réunion de $|\mathcal{P}_1^F|$ courbes rationnelles. Montrons que ce sont des droites.

Soit L un sous-espace de dimension 1 de V représentant un élément de Y_1. Comme Y_1 est invariant par F, FL est aussi dans Y_1. Montrons que si L' est un autre sous-espace de dimension 1 contenu dans $L+F^2L$ alors $L' \in \overline{Y}_1$. En effet $L+F^2L$ est un sous-espace de dimension 2 de V qui est isotrope et invariant par F^2. Donc $\langle L', L'\rangle = 0, \langle L', F^2L'\rangle = 0$. Par conséquent, $\overline{Y}_1$ est constitué des droites (L, FL) dans $\mathbf{P}_3$ avec $L \in Y_1$.

L'isomorphisme $X(s_1) \longrightarrow Y_1$ montre que les traces des différentes droites sur Y_1 sont disjointes. Par conséquent elles ne peuvent se couper que sur les points de Y_0.

Le groupe G^F opère transitivement sur Y_0 et sur l'ensemble des droites de $\overline{Y}_1$. Donc, en chaque point de Y_0 passe le même nombre de droites. Il est égal au nombre de droites, multiplié par le nombre de points rationnels sur les droites, divisé par le nombre de points de Y_0, c'est-à-dire

$$\frac{(q^3+1)(q+1)(q^2+1)}{(q^3+1)(q^2+1)} = q+1.$$

6.4 Equation

Proposition 6.6 *La surface $\overline{Y}$ est une sous-variété de $\mathbf{P}_3$ qui a pour équation*

$$x_1^{q+1} + x_2^{q+1} + x_3^{q+1} + x_4^{q+1} = 0$$

C'est une surface hermitienne, propre et lisse.

Démonstration — C'est clair. Les surfaces (et plus généralement les variétés) hermitiennes ont été étudiées par R.C. Bose et I.M. Chakravarti [B-C] . Voir aussi [H-T].

6.5 Fonction zêta

Théorème 6.2 *La fonction Z de $\overline{Y}$ sur $\mathbf{F}_{q^2}$ est donnée par*

$$Z(t) = \frac{1}{Q_0(t)Q_2(t)Q_4(t)}$$

avec

$$Q_0(t) = 1-t \quad , \quad Q_2(t) = (1-q^2t)^{q^3-q^2+q+1} \quad \text{et} \quad Q_4(t) = 1-q^4t.$$

La surface $\overline{Y}^{F^2}$ atteint la borne de Weil-Deligne.

Démonstration — Le calcul de la fonction Z des hypersurfaces diagonales fait par Weil [W] et repris par exemple dans [I-R] p. 162-3 donne

$$Z(t) = \frac{1}{Q_0(t)Q_2(t)Q_4(t)} \quad \text{avec} \quad Q_0(t) = 1 - t \quad \text{et} \quad Q_4(t) = 1 - q^4 t$$

et $\deg Q_2 = q(q^2 - q + 1) + 1$.
En particulier $\overline{Y}^{F^2}$ atteint la borne de Weil-Deligne : en effet

$$|\overline{Y}^{F^2}| = 1 + q^4 + (q^3 - q^2 + q + 1)q^2.$$

Par conséquent toutes les racines de Q_2 sont égales à q^{-2} (lemme 3.1) et donc

$$Q_2(t) = (1 - q^2 t)^{q^3 - q^2 + q + 1}.$$

7 Cas C_2

7.1 Définition

Prenons $\quad n = 4, \quad G = Sp(4, \overline{k}), \quad F : g \longmapsto g^q.$
Le groupe G est le groupe qui fixe la forme symplectique sur $V = \overline{k}^4$

$$(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle = y_1 x_4 - x_1 y_4 + x_2 y_3 - y_2 x_3.$$

Choisissons comme sous-groupe de Borel B_0 le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures dans G, comme tore maximal T le sous-groupe des matrices diagonales dans G. Le groupe de Weil $\mathbf{W}$ de G est isomorphe au groupe à 8 éléments engendré par les matrices

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et S est formée des deux éléments s_1 et s_2. Voir [C2], chapitre 1.
Pour étudier la surface $\overline{X}(s_1, s_2)$ on va définir une application de cette surface dans $\mathbf{P}_3$.

7.2 Drapeaux isotropes

Définition 7.1 Un *drapeau isotrope* est un drapeau de V formé d'espaces isotropes pour la forme symplectique sur V.

On fait correspondre au drapeau isotrope (V_1, V_2) de k^4 le sous-groupe de Borel B ensemble des éléments de G stabilisant à la fois V_1 et V_2. On vérifie qu'on a ainsi défini une bijection entre l'ensemble des drapeaux isotropes et $\mathcal{B}$. Cf. [L2].

7.3 La projection de $\mathcal{B}$ sur $\mathbf{P}_3$

Le sous-groupe parabolique P_2 de G stabilisant l'élément $(1:0:0:0)$ de $\mathbf{P}_3$ s'écrit

$$P_2 = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

L'application déduite par passage au quotient de $g \longmapsto g(1:0:0:0)$ est un isomorphisme de G/P_2 sur $\mathbf{P}_3$. Considérons la surjection naturelle $p_2 : G/B_0 \longrightarrow G/P_2$ qui envoie gB_0 sur gP_2. Elle devient par ces isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} G/B_0 & \xrightarrow{p} & G/P_2 \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathbf{P}_3 \\ (V_1, V_2) & \longmapsto & V_1. \end{array}$$

7.4 Une filtration de $\mathbf{P}_3$

Considérons $V = k^4$ muni de l'application de Frobenius $F : (x_i)_i \to (x_i^q)_i$.
Soit la variété $\overline{Y}\imath\mathbf{P}_3$ définie par l'équation $\langle L, FL\rangle = 0$.

Soit la filtration de $\overline{Y}$:

$\overline{Y}_0$	est l'ensemble des droites L telles que	$L = FL$;		
$\overline{Y}_1$	est l'ensemble des droites L telles que	$\langle L, FL\rangle = 0$	et	$\langle L, F^2L\rangle = 0$;
$\overline{Y}_2$	est l'ensemble des droites L telles que	$\langle L, FL\rangle = 0$.		

Posons $Y_0 = \overline{Y}_0$, $Y_1 = \overline{Y}_1 - Y_0$ et $Y_2 = \overline{Y}_2 - \overline{Y}_1 = Y$.
Alors on a
- $\overline{Y}_0 \subset \overline{Y}_1 \subset \overline{Y}_2 = \overline{Y}$.
- $Y_0 \cup Y_1 \cup Y_2 = \overline{Y}$ où la réunion est disjointe.
- $Y_0 = \overline{Y}^F = G^F/P_2^F = \mathbf{P}_3(\mathbf{F}_q)$.

7.5 Application de $\overline{X(s_1s_2)}$ sur $\mathbf{P}_3$

Proposition 7.1 *La surface $X(s_1s_2)$ correspond à l'ensemble des drapeaux $(L, L+FL)$ où L est un élément de $\mathbf{P}_3$ contenu dans Y. La restriction de p_2 à $X(s_1s_2)$ est un isomorphisme dont l'image est Y donné par*

$$\begin{array}{rcl} X(s_1s_2) & \longrightarrow & Y \\ (L, L+FL) & \longmapsto & L. \end{array}$$

Démonstration — La variété $X(s_1s_2)$ est formée de l'ensemble des sous-groupes de Borel B tels que $B \xrightarrow{s_1s_2} FB$. Montrons que si $B \in X(s_1s_2)$ alors $V_2 = V_1 \oplus FV_1$. En effet FB correspond au drapeau isotrope (FV_1, FV_2). Pour qu'un sous-groupe de Borel B vérifie $B \xrightarrow{s_1s_2} FB$, il faut et il suffit qu'il existe un sous-groupe de Borel B' tel que $B \xrightarrow{s_1} B'$ et $B' \xrightarrow{s_2} FB$, c'est-à-dire qu'il existe un drapeau (V_1', V_2') tel que

$$\begin{cases} V_1 & \neq V_1' \\ V_2 & = V_2' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_1' & = FV_1 \\ V_2' & \neq FV_2 \end{cases}.$$

Ces équations impliquent $(V_1', V_2') = (FV_1, V_2)$, donc, puisque (V_1', V_2') est un drapeau $FV_1 = V_1' 1 V_2' = V_2$. D'autre part elles impliquent $FV_1 = V_1' \neq V_1$, donc, le sous-espace V_2 de dimension 2 contient les droites V_1 et FV_1 qui sont distinctes, c'est-à-dire $V_2 = V_1 \oplus FV_1$ ou encore $(V_1, V_2) = (L, L \oplus FL)$ où L est une droite de V passant par l'origine.

Remarquons que $L \oplus FL$ doit être un sous-espace isotrope, c'est-à-dire $\langle L, FL \rangle = 0$.

D'autre part, $V_2 \neq FV_2$, c'est-à-dire $L \oplus FL \neq FL \oplus F^2L$. Donc L, FL, F^2L doivent engendrer un sous-espace de dimension 3, autrement dit ils doivent être linéairement indépendants. Donc $\langle x, F^2x \rangle \neq 0$ pour $x \in L - \{0\}$ puisque la dimension d'un sous-espace isotrope maximal de V est 2.

Réciproquement si une droite L est dans $\mathbf{P}_3$ et est telle que $\langle L, FL \rangle = 0$ et que L, FL, F^2L soient linéairement indépendants, on lui associe le drapeau complet $(L, L \oplus FL)$ correspondant au sous-groupe de Borel B. Le drapeau complet correspondant à FB est alors $(FL, FL \oplus F^2L)$.

On a

$$\begin{array}{lll} (L, L \oplus FL) & & \\ \quad \xrightarrow{s_1} (FL, L \oplus FL) & & \text{car } L \neq FL \\ \quad\quad \xrightarrow{s_2} (FL, FL \oplus F^2L) & & \text{car } L,\ FL,\ F^2L \text{ sont linéairement indépendants} \end{array}$$

donc $B \xrightarrow{s_1s_2} FB$. Remarquons enfin que pour que L, FL et F^2L soient linéairement indépendants il suffit que $\langle x, F^2x \rangle \neq 0$ pour $x \in L - \{0\}$.

Enfin $L \mapsto (L, L + FL)$ est clairement un morphisme, ainsi que son opposé.

Proposition 7.2 *Par le morphisme ci-dessus, on a*

$$\overline{X(s_2)} = X(s_2) \cup X(e) \longrightarrow Y_0.$$

L'image réciproque d'un point de Y_0 par le morphisme ci-dessus est une courbe rationnelle.

Démonstration — Montrons que si $B \in X(s_2)$ alors $V_1 = FV_1$. En effet FB correspond au drapeau isotrope (FV_1, FV_2) et si $B \xrightarrow{s_2} FB$ le lemme 2.4 implique

$$\begin{cases} V_1 & = FV_1 \\ V_2 & \neq FV_2. \end{cases}$$

L'image réciproque d'un point de Y_0 est formée de l'ensemble des sous-groupes de Borel B tels que $B \xrightarrow{s_2} FB$ ou $B = FB$.

Donc l'image réciproque d'un point de Y_0 représenté par V_1 est formée de l'ensemble des drapeaux isotropes (V_1, V_2) tels que $V_1 \imath V_2$. Comme l'orthogonal de V_1 est un sous-espace de dimension 3 de V contenant V_1, cet ensemble est encore un pinceau de plans passant par V_1 contenu dans $V_1^{\perp}$. Et il est donc isomorphe à une droite rationnelle.

Proposition 7.3 *Le morphisme ci-dessus, induit un isomorphisme*

$$X(s_1) \longrightarrow Y_1$$

Démonstration — Montrons que si $B \in X(s_1)$ alors $V_2 = V_1 \oplus FV_1$. En effet FB correspond au drapeau isotrope (FV_1, FV_2). Alors si $B \xrightarrow{s_1} FB$ le lemme 2.4 implique

$$\begin{cases} V_1 & \neq FV_1 \\ V_2 & = FV_2. \end{cases}$$

Le sous-espace V_2 contient V_1 et FV_1 ; il est donc égal à $V_1 \oplus FV_1$. Comme $V_2 = FV_2$, c'est-à-dire $V_1 \oplus FV_1 = FV_1 \oplus F^2V_1$, on a donc $F^2V_1 \imath V_1 \oplus FV_1 = V_2$. Comme l'espace V_2 est isotrope, on a $\langle V_1, FV_1 \rangle = 0$ et $\langle V_1, F^2V_1 \rangle = 0$ donc V_1 est dans l'espace $\overline{Y}_1$. Comme $V_1 \neq FV_1$, V_1 est en fait dans Y_1.
Inversement l'application $V_1 \longmapsto (V_1, V_1 \oplus FV_1)$ est un morphisme de Y_1 dans $X(s_1)$.

Théorème 7.1 *On obtient le diagramme commutatif suivant défini sur $\mathbf{F}_q$.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{B} & \supset & \overline{X(s_1s_2)} & = & X(s_1s_2) & \cup & X(s_1) & \cup & X(s_2) \cup X(e) \\
{\scriptstyle p_2}\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \wr & & \big\downarrow \wr & & \big\downarrow \textit{par contraction de } \mathbf{P}_1 \\
\mathbf{P}_3 & \supset & \overline{Y} & = & Y_2 & \cup & Y_1 & \cup & Y_0 = \mathbf{P}_3^F
\end{array}$$

$\overline{X}(s_2)$ est constitué de $|G^F/P_2^F| = q^3+q^2+q+1$ courbes rationnelles. La surface $\overline{X}(s_1, s_2)$ est obtenue à partir de $\overline{Y}$ par éclatement des points de Y_0.

Démonstration — Comme plus haut, $\overline{X}(s_1, s_2) \xrightarrow{p_2 \circ \phi} \overline{Y}$ est un morphisme birationnel, donc donné par des éclatements (cf. [Har], p. 411). Les seuls éclatements sont au-dessus de Y_0, donc ailleurs $\overline{X}(s_1, s_2) \longrightarrow \overline{Y}$ est un isomorphisme local.

7.6 Equation de $\overline{Y}$

Proposition 7.4 *La surface $\overline{Y}$ a pour équation*

$$\text{sur } \mathbf{F}_q \qquad x_1^q x_4 - x_1 x_4^q + x_2 x_3^q - x_2^q x_3 = 0 \tag{3}$$

$$\text{sur } \mathbf{F}_{q^2} \qquad \sum_{i=1}^{4} x_i^{q+1} = 0.$$

C'est une surface propre et lisse.

Démonstration — Choisissons deux éléments a, d de $\mathbf{F}_{q^2}$ tels que $a^{q+1} = -1$ et $d \in \mathbf{F}_{q^2} - \mathbf{F}_q$. Alors par le changement de variables

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1 & = ay_1 + y_4 \\ x_4 & = ad^q y_1 + dy_4 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{ll} x_2 & = ad^q y_2 + dy_3 \\ x_3 & = ay_2 + y_3 \end{array} \right.$$

l'équation (3) devient $y_1^{q+1} + y_2^{q+1} + y_3^{q+1} + y_4^{q+1} = 0$.

Remarque 7.1 La surface $\overline{Y}$ est donc une surface hermitienne tordue.

7.7 Fonction zêta de $\overline{Y}$

Rappelons la démonstration de Lusztig ([L2], lemme 31).

Théorème 7.2 *On a*

$$Z(t) = \frac{1}{Q_0(t)Q_2(t)Q_4(t)}$$

avec

$$Q_0(t) = 1 - t \quad , \quad Q_4(t) = 1 - q^2 t$$
$$et \quad Q_2(t) = (1 - qt)^{\frac{q^3+q+2}{2}} (1 + qt)^{\frac{(q-1)^2 q}{2}}$$

Démonstration — La fonction zêta d'une surface X s'écrit

$$Z(t) = \frac{Q_1(t)Q_3(t)}{Q_0(t)Q_2(t)Q_4(t)}$$

avec $Q_i(t) = \det(1 - F^* t, H^i(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_l)) = \prod_{j=1}^{b_i}(1 - q^{i/2}\omega_{i,j} t)$ où les $q^{i/2}\omega_{i,j}$ sont les valeurs propres du Frobenius dans $H^i(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_l)$ (cf. 3.2).
Pour la surface $\overline{Y} \times_{\mathbf{F}_q} \mathbf{F}_{q^2}$ la proposition 7.4 et le théorème 6.2 impliquent

$$Z(t) = \frac{1}{(1-t)(1-q^2 t)^{q^3-q^2+q+1}(1-q^4 t)}$$

Donc pour la surface $\overline{Y}$, la fonction Z est donnée par

$$Z(t) = \frac{1}{Q_0(t)Q_2(t)Q_4(t)}$$

avec $Q_2(t) = (1 - q^{i/2}t)^a (1 + q^{i/2}t)^b$ et $a + b = q^3 - q^2 + q + 1$. De cette formule on déduit $N_1 = 1 + q^2 + q(a - b)$.
D'autre part, on a $\overline{Y}(\mathbf{F}_q) = \mathbf{P}_3(\mathbf{F}_q)$ donc $N_1 = q^3 + q^2 + q + 1$ ce qui détermine a et b.

Corollaire 7.1 *Les nombres de Betti sont donnés par*

$$\begin{array}{lcl} \dim H^0 & = & 1 \\ \dim H^2 & = & q^3 - q^2 + q + 1 \\ \dim H^4 & = & 1. \end{array}$$

Théorème 7.3 *Parmi les surfaces lisses S contenues dans $\mathbf{P}_3$ et telles que $S^F = \mathbf{P}_3^F$, la surface $\overline{Y}$ a un degré minimal et un deuxième nombre de Betti minimal.*

Démonstration — Le deuxième nombre de Betti d'une surface S de degré d plongée dans $\mathbf{P}_3$ est donné par $b_2 = (d-1)(d^2 - 3d + 3) + 1$ (cf. par exemple [I-R] p. 162). C'est une fonction croissante de d, donc il revient au même de dire que le degré d d'une surface est minimal ou que le deuxième nombre de Betti est minimal. Si le degré d'une surface S est inférieur ou égal à q, une droite de $\mathbf{P}_3$ coupe S en au plus d points, donc $S^F \neq \mathbf{P}_3^F$. Donc une surface telle que $S^F = \mathbf{P}_3^F$ a un degré au moins égal à $q+1$. On a vu que la surface $\overline{Y}$ vérifie la condition $\overline{Y}^F = \mathbf{P}_3^F$; elle est de degré $q+1$.

8 Cas $^2A_4$

8.1 Définition

Prenons

$$n = 5, \quad G = SL(5, \overline{k}) \quad F : g \mapsto {}^t(g^{[q]})^{-1}$$

Alors G^F est le groupe qui fixe la forme sesquilinéaire hermitienne suivante dans $(\mathbf{F}_{q^2})^5$.

$$(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{5} x_i y_i^q.$$

La forme $\langle \, . \, , \, . \, \rangle$ s'étend à $V = \overline{k}^5$ en une forme sesquilinéaire par rapport à l'automorphisme $\lambda \longmapsto \lambda^q$ de $\overline{k}$. Les mêmes propriétés que dans le cas de $^2A_3$ sont vraies. En particulier, on définit l'orthogonal $V'^{\perp}$ d'un sous-espace V' de la même manière et on vérifie que $(V'^{\perp})^{\perp} = F^2 V'$. De même si un sous-groupe de Borel B correspond au drapeau (V_1, V_2, V_3, V_4), le sous-groupe de Borel FB correspond au drapeau $(V_4^{\perp}, V_3^{\perp}, V_2^{\perp}, V_1^{\perp})$.

Le groupe de Weil $\mathbf{W}$ est isomorphe au groupe des symétries des cinq vecteurs de la base canonique de V, et S est formé des quatre éléments s_i (transposition des vecteurs de rang i et $i+1$) pour $1 \leq i \leq 4$ (cf. § 2.4). L'endomorphisme F échange s_1 avec s_4, et s_2 avec s_3 (cf. [C2], chapitre 1). On définit les classes de conjugaison de sous-groupes paraboliques $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ associés aux classes $\{s_1, s_4\}$ et $\{s_2, s_3\}$ comme dans le paragraphe 2.3.1. Les éléments de $\mathcal{P}_1$ ou de $\mathcal{P}_2$ sont conjugués respectivement aux matrices

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

On vérifie (cf. [C2], chapitre 2) que

$$|\mathcal{P}_1^F| = (q^5 + 1)(q^3 + 1) \quad \text{et} \quad |\mathcal{P}_2^F| = (q^5 + 1)(q^2 + 1).$$

8.2 Variétés dans $\mathbf{P}_4$

Munissons $V = \overline{k}^5$ de l'application de Frobenius $F^2 : (x_i)_{1\leq i\leq 5} \to (x_i^{q^2})_{1\leq i\leq 5}$.
Soit la variété $\overline{Y}\imath\mathbf{P}_4$ définie par les équations $\langle L, L\rangle = 0$ et $\langle L, F^2L\rangle = 0$ où L est un sous-espace de dimension 1 de V définissant un point de $\mathbf{P}_4$. Soit la filtration de $\overline{Y}$:

$$\begin{array}{rll} \overline{Y}_0 & \text{défini par :} & \langle L, L\rangle = 0, \quad L = F^2L, \\ \overline{Y}_1 & \text{défini par :} & \langle L, L\rangle = 0, \quad \langle L, F^2L\rangle = 0, \quad \langle L, F^4L\rangle = 0, \\ \overline{Y} = \overline{Y}_2 & \text{défini par :} & \langle L, L\rangle = 0, \quad \langle L, F^2L\rangle = 0. \end{array}$$

Posons $Y_0 = \overline{Y}_0$, $Y_1 = \overline{Y}_1 - Y_0$ et $Y_2 = \overline{Y}_2 - \overline{Y}_1 = Y$. Alors
- $\overline{Y}_0 \subset \overline{Y}_1 \subset \overline{Y}_2 = \overline{Y}$;
- $Y_0 \cup Y_1 \cup Y_2 = \overline{Y}$.

Proposition 8.1 *La surface $\overline{Y}$ est l'intersection de deux hypersurfaces de $\mathbf{P}_4$ d'équations homogènes :*

$$\Sigma_1 : \quad \langle x, x\rangle = 0 \qquad \textit{ou} \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i^{1+q} = 0;$$

$$\Sigma_2 : \quad \langle x, F^2x\rangle = 0 \qquad \textit{ou} \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i^{1+q^3} = 0.$$

Elles ne sont pas transverses. Le lieu singulier de $\overline{Y}$ est Y_0.

Démonstration — Les hyperplans tangents à Σ_1 et Σ_2 au point $A = (t_i)_{1\leq i\leq 5}$ ont respectivement comme équations

$$\sum_{i=1}^{5} t_i^q x_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{5} t_i^{q^3} x_i = 0.$$

L'intersection de deux variétés non singulières est non singulière en un point si et seulement si elle se coupent transversalement en ce point. Si $A \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ les deux hyperplans ci-dessus ne sont pas transverses si et seulement s'ils sont égaux c'est-à-dire si $t_1^{q(q^2-1)} = \cdots = t_5^{q(q^2-1)}$. En prenant $t_1 = 1$, on a donc $t_i \in \mathbf{F}_{q^2}$, d'où $A \in Y_0$.

8.3 Application de $\overline{X(s_1s_2)}$ sur $\mathbf{P}_4$

Proposition 8.2 *La surface $X(s_1s_2)$ correspond à l'ensemble des drapeaux $(L, L\oplus F^2L, (L\oplus F^2L)^\perp, L^\perp)$ où L est un élément de $\mathbf{P}_4$ contenu dans Y. La restriction de p à $X(s_1s_2)$ est un isomorphisme dont l'image est Y. Elle est donnée par*

$$\begin{array}{ccc} X(s_1s_2) & \longrightarrow & Y \\ (L, L\oplus F^2L, (L\oplus F^2L)^\perp, L^\perp) & \longmapsto & L. \end{array}$$

Démonstration — La variété $X(s_1s_2)$ est formée de l'ensemble des sous-groupes de Borel B tels que $B \overset{s_1s_2}{\longrightarrow} FB$. Soit (V_1, V_2, V_3, V_4) le drapeau correspondant au sous-groupe de

Borel B. Alors FB correspond au drapeau $(V_4^\perp, V_3^\perp, V_2^\perp, V_1^\perp)$. Pour qu'un sous-groupe de Borel B vérifie $B \xrightarrow{s_1 s_2} FB$, il faut et il suffit qu'il existe un sous-groupe de Borel B' tel que $B \xrightarrow{s_1} B'$ et $B' \xrightarrow{s_2} FB$, c'est-à-dire qu'il existe un drapeau (V_1', V_2', V_3', V_4') tel que

$$\begin{cases} V_1 & \neq V_1' \\ V_2 & = V_2' \\ V_3 & = V_3' \\ V_4 & = V_4' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_1' & = V_4^\perp \\ V_2' & \neq V_3^\perp \\ V_3' & = V_2^\perp \\ V_4' & = V_1^\perp \end{cases} .$$

Ces équations impliquent d'une part $(V_1', V_2', V_3', V_4') = (V_4^\perp, V_2, V_3, V_4)$ donc, puisque (V_1', V_2', V_3', V_4') est un drapeau : $V_4^\perp = V_1' \imath V_2' = V_2$. Et d'autre part elles impliquent $V_4^\perp = V_1' \neq V_1$ et $V_4 = V_4' = V_1^\perp$ donc le sous-espace V_2 de dimension 2 contient les droites V_1 et $V_4^\perp$ qui sont distinctes. Donc finalement

$$\begin{cases} V_2 & = V_1 \oplus V_4^\perp = V_1 \oplus (V_1^\perp)^\perp = V_1 \oplus F^2 V_1 \\ V_3 & = V_3' = V_2^\perp = (V_1 \oplus F^2 V_1)^\perp \\ V_4 & = V_1^\perp \end{cases}$$

ou encore $(V_1, V_2, V_3, V_4) = (L, L \oplus F^2 L, (L \oplus F^2 L)^\perp, L^\perp)$ où L est une droite de V passant par l'origine.

Comme $(L, L \oplus F^2 L, (L \oplus F^2 L)^\perp, L^\perp)$ est un drapeau, on a

$$L \imath L^\perp \quad , \quad L \oplus F^2 L \imath (L \oplus F^2 L)^\perp \quad \text{et} \quad L \neq F^2 L$$

ce qui implique

$$\langle L, L \rangle = 0 \quad , \quad \langle L, F^2 L \rangle = 0 \quad \text{et} \quad L \neq F^2 L.$$

D'autre part, $V_2 \neq V_3^\perp = (V_2^\perp)^\perp = F^2 V_2$ c'est-à-dire $L \oplus F^2 L \neq F^2(L \oplus F^2 L) = F^2 L \oplus F^4 L$. Donc $F^4 L$ n'est pas dans le sous-espace $L \oplus F^2 L$, qui est un sous-espace isotrope maximal, par conséquent $\langle L, F^4 L \rangle \neq 0$.

Réciproquement, soit $L \in \mathbf{P}_4$ telle que

$$\langle L, L \rangle = 0 \quad , \quad \langle L, F^2 L \rangle = 0 \quad \text{et que} \quad \langle L, F^4 L \rangle \neq 0.$$

on lui associe le drapeau complet $(L, L \oplus F^2 L, (L \oplus F^2 L)^\perp, L^\perp)$ correspondant au sous-groupe de Borel B. Le drapeau complet correspondant à FB est alors

$$((L^\perp)^\perp, ((L \oplus F^2 L)^\perp)^\perp, (L \oplus F^2 L)^\perp, L^\perp) = (F^2 L, F^2 L \oplus F^4 L, (L \oplus F^2 L)^\perp, L^\perp).$$

On a

$$\begin{aligned} & (L, L \oplus F^2 L, (L \oplus F^2 L)^\perp, L^\perp) \\ & \quad \xrightarrow{s_1} (F^2 L, L \oplus F^2 L, (L \oplus F^2 L)^\perp, L^\perp) && \text{car } L \neq F^2 L \\ & \quad\quad \xrightarrow{s_2} (F^2 L, F^2 L \oplus F^4 L, (L \oplus F^2 L)^\perp, L^\perp) && \text{car } L,\ F^2 L,\ F^4 L \text{ sont linéairement indépendants} \end{aligned}$$

donc $B \xrightarrow{s_1 s_2} FB$.

Remarquons enfin que $L \mapsto (L, L \oplus F^2 L, (L \oplus F^2 L)^\perp, L^\perp)$ est clairement un morphisme, ainsi que son opposé.

Proposition 8.3 *Le morphisme p envoie*

$$\overline{X(s_2)} = X(s_2) \cup X(e)$$

dans Y_0.

Démonstration — Le sous-groupe de Borel B correspond au drapeau (V_1, V_2, V_3, V_4). Montrons que si $B \in \overline{X(s_2)}$ alors $V_1 = F^2V_1$. En effet, FB correspond au drapeau $(V_4^{\perp}, V_3^{\perp}, V_2^{\perp}, V_1^{\perp})$ et si $B \xrightarrow{s_2} FB$ ou si $B \xrightarrow{e} FB$ on a d'après le lemme 2.4

$$V_1 = V_4^{\perp} = (V_1^{\perp})^{\perp} = F^2V_1.$$

Proposition 8.4 *L'image réciproque d'un point de Y_0 par le morphisme p est une courbe hermitienne.*

Démonstration — L'image réciproque d'un point de Y_0 est formée de l'ensemble des sous-groupes de Borel B tels que $B \xrightarrow{s_2} FB$ ou $B = FB$. Donc l'image réciproque d'un point de Y_0 représenté par la droite L est formée de l'ensemble des drapeaux $(L, V_2, V_3, L^{\perp})$ tels que $L \imath V_2$, $V_3 = V_2^{\perp}$, $V_3 \imath L^{\perp}$. Cet ensemble de drapeaux est isomorphe à l'ensemble des V_2 tels que $L \imath V_2 \imath V_2^{\perp} \imath L^{\perp}$. Dans l'espace $L^{\perp}/L$ la forme hermitienne $\langle\ .\ ,\ .\ \rangle$ passe au quotient et l'ensemble des V_2/L est tel que $V_2/L \imath V_2/L^{\perp}$ c'est-à-dire $\langle V_2/L, V_2/L \rangle = 0$. C'est donc une courbe hermitienne.

Proposition 8.5 *Le morphisme p, induit un isomorphisme de $X(s_1)$ sur Y_1 donné par*

$$\begin{array}{ccc} X(s_1) & \longrightarrow & Y_1 \\ (L, L \oplus F^2L, (L \oplus F^2L)^{\perp}, L^{\perp}) & \longmapsto & L. \end{array}$$

Démonstration — La démonstration va se faire en plusieurs étapes.

Etape 1 *L'image par p de $X(s_1)$ est contenue dans Y_1.*

Le sous-groupe de Borel B correspond au drapeau (V_1, V_2, V_3, V_4). Montrons que si $B \in X(s_1)$ alors $V_1 \in Y_1$. Si $B \xrightarrow{s_1} FB$, le lemme 2.4 implique

$$\left\{ \begin{array}{ccc} V_1 & \neq & V_4^{\perp} \\ V_2 & = & V_3^{\perp} \\ V_3 & = & V_2^{\perp} \\ V_4 & = & V_1^{\perp} \end{array} \right.$$

d'où $V_2 = V_3^{\perp} = (V_2^{\perp})^{\perp} = F^2V_2$ donc $V_2 = F^2V_2 = F^4V_2$, par conséquent V_1, F^2V_1 et F^4V_1 sont contenus dans V_2. Comme V_2 est isotrope, car $V_2 \imath V_3 = V_2^{\perp}$, on a

$$\langle V_1, V_1 \rangle = 0, \qquad \langle V_1, F^2V_1 \rangle = 0, \qquad \langle V_1, F^4V_1 \rangle = 0$$

c'est-à-dire $V_1 \in \overline{Y}_1$. Enfin, $V_1 \not\ Y_0$ car $V_1 \neq V_4^{\perp} = (V_1^{\perp})^{\perp} = F^2V_1$.

Etape 2 *L'image réciproque d'un point de Y_1 dans $X(s_1)$ par le morphisme p est formée d'au plus un point.*

En effet, on voit que si $p : (V_1, V_2, V_3, V_4) \longrightarrow V_1$ alors $V_1, F^2V_1 \imath V_2$ et $V_1 \neq F^2V_1$ donc $V_2 = V_1 \oplus F^2V_1$. On a aussi $V_3 = V_2^{\perp} = (V_1 \oplus F^2V_1)^{\perp}$ et $V_4 = V_1^{\perp}$. Donc (V_1, V_2, V_3, V_4) est bien déterminé par V_1.

Etape 3 *Le morphisme*

$$L \mapsto (L, L + F^2L, (L + F^2L)^{\perp}, L^{\perp})$$

envoie Y_1 dans $X(s_1)$.

On associe à l'élément L de $\mathbf{P}_4$ tel que

$$\langle L, L \rangle = 0 \quad , \quad \langle L, F^2L \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle L, F^4L \rangle = 0$$

le drapeau $(L, L + F^2L, (L + F^2L)^{\perp}, L^{\perp})$ correspondant à B. En effet $\langle L, L \rangle = 0$ et $\langle L, F^2L \rangle = 0$ impliquent $L + F^2L \imath (L + F^2L)^{\perp}$. Le drapeau correspondant à FB est alors

$$((L^{\perp})^{\perp}, ((L + F^2L)^{\perp})^{\perp}, (L + F^2L)^{\perp}, L^{\perp}) = (F^2L, F^2L + F^4L, (L + F^2L)^{\perp}, L^{\perp})$$

car $(L^{\perp})^{\perp} = F^2L$ et $((L + F^2L)^{\perp})^{\perp} = F^2(L + F^2L) = F^2L + F^4L$.
Puisque $\langle L, F^2L \rangle = 0$ et que $\langle L, F^4L \rangle = 0$ on a $F^4L \imath L + F^2L$ et donc

$$(L, L + F^2L, (L + F^2L)^{\perp}, L^{\perp}) \xrightarrow{s_1} (F^2L, L + F^2L, (L + F^2L)^{\perp}, L^{\perp})$$
$$= (F^2L, F^2L + F^4L, (L + F^2L)^{\perp}, L^{\perp}).$$

Proposition 8.6 *Le schéma $\overline{X}(s_1)$ est réunion disjointe de $|\mathcal{P}_1^F|$ courbes rationnelles. Le schéma $\overline{Y}_1$ est réunion de $|\mathcal{P}_1^F|$ droites de $\mathbf{P}_4$.*

Démonstration — On montre comme plus haut (lemme 6.2) que $\overline{X}(s_1)$ est réunion disjointe de $|\mathcal{P}_1^F|$ courbes rationnelles et que $\overline{Y}_1$ est réunion de $|\mathcal{P}_1^F|$ courbes rationnelles. Montrons que ce sont des droites dans $\mathbf{P}_4$.
Soit $L \imath k^5$ un sous-espace de dimension 1 représentant un élément de Y_1. Soit L' un autre sous-espace de dimension 1 contenu dans $L + F^2L$. Remarquons que $L + F^2L$ est un sous-espace de dimension 2 de k^5, qui est isotrope et invariant par F^2. Donc $\langle L', L' \rangle = 0$, $\langle L', F^2L' \rangle = 0$, $\langle L', F^4L' \rangle = 0$ et par conséquent $L' \in \overline{Y}_1$. Donc $\overline{Y}_1$ est constitué des droites (L, FL) dans $\mathbf{P}_4$ avec $L \in Y_1$.

Théorème 8.1 *On obtient le diagramme commutatif suivant défini sur $\mathbf{F}_{q^2}$.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{B} & \supset & \overline{X(s_1s_2)} & = & X(s_1s_2) & \cup & X(s_1) & \cup & X(s_2) \cup X(e) \\
p\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow \text{par contraction de courbes hermitiennes} \\
\mathbf{P}_4 & \supset & \overline{Y} & = & Y_2 & \cup & Y_1 & \cup & Y_0
\end{array}$$

Le schéma $\overline{X}(s_1)$ est constitué de $|\mathcal{P}_1^F|$ courbes rationnelles et le schéma $\overline{Y}_1$ est constitué de droites de $\mathbf{P}_4$.
Le schéma $\overline{X}(s_2)$ est constitué de $|Y_0| = |\mathcal{P}_2^F|$ courbes hermitiennes et $\overline{Y}$ est obtenu à partir de $\overline{X}(s_1, s_2)$ par contraction des courbes hermitiennes dans $\overline{X}(s_2)$.
Le groupe G^F opère transitivement sur les courbes rationnelles composantes connexes de $\overline{X}(s_1)$ et sur les courbes hermitiennes composantes connexes de $\overline{X}(s_2)$.

Démonstration — Cela résulte des propositions précédentes.

8.4 La fonction zêta de la variété $\overline{X}(s_1, s_2)$

Théorème 8.2 *La fonction zêta de la variété $\overline{X}(s_1, s_2)$ sur $\mathbf{F}_{q^2}$ est donnée par*

$$Z(t) = \frac{Q_1(t)Q_3(t)}{Q_0(t)Q_2(t)Q_4(t)}$$

avec

$$Q_0(t) = 1 - t \quad , \quad Q_2(t) = (1 - q^2t)^{2+q^2+q^4+q^6+q^8} \quad \textit{et} \quad Q_4(t) = 1 - q^4t$$

et

$$Q_1(t) = (1 + qt)^{q(q-1)(q^2+1)} \quad , \quad Q_3(t) = (1 + q^3t)^{q(q-1)(q^2+1)}.$$

Démonstration — D'après la section 4

$$t\frac{Z'}{Z} = t(\log Z)' = \sum_{s=1}^{\infty} |X(s_1s_2)^{F^{2s}}|t^s + \sum_{s=1}^{\infty} |X(s_1)^{F^{2s}}|t^s + \sum_{s=1}^{\infty} |X(s_2)^{F^{2s}}|t^s + \sum_{s=1}^{\infty} |X(e)^{F^{2s}}|t^s.$$

D'après le théorème 4.1, si T est un tore de Coxeter de G^F,

$$\sum_{s=1}^{\infty} |X(s_1s_2)^{F^{2s}}|t^s = \frac{|G^F|}{|T^F|}t^5 \prod_{j=0}^{4}(1 - t\lambda_j)^{-1}$$

D'après [L1], table p. 106, on a

$$\frac{|G^F|}{|T^F|} = \frac{q^{10}(q^2-1)(q^3+1)(q^4-1)(q^5+1)}{q^4 - q^3 + q^2 - q + 1} = q^{10}(q+1)(q^2-1)(q^3+1)(q^4-1)$$

et les λ_j sont donnés par $\lambda_j = (-1)^j q^j$ pour $0 \leq j \leq 4$.
Le calcul des $X(s_i)$ se fait grâce à l'argument d'induction de Lusztig (proposition 2.6). On a vu que $|\mathcal{P}_1^F| = (q^5+1)(q^3+1)$ et que $|\mathcal{P}_2^F| = (q^5+1)(q^2+1)$. De plus $X(s_1) = \bigcup_{\mathcal{P}_1^F} X'(s'_1)$ d'où

$$\sum_{s=1}^{\infty} |X(s_1)^{F^{2s}}|t^s = |\mathcal{P}_1^F| \sum_{s=1}^{\infty} |X'(s'_1)^{F^{2s}}|t^s.$$

Le schéma $X'(s'_1)$ est isomorphe, d'après 2.3.1, au schéma de Deligne-Lusztig associé au groupe $GL(2)$, et à l'endomorphisme F^2. Appliquons le théorème 4.1 sur $\mathbf{F}_{q^2}$ à M_1, un groupe de type A_1. Si T_1 est un tore de Coxeter de M_1 :

$$\sum_{s=1}^{\infty} |X'(s'_1)^{F^{2s}}|t^s = \frac{|M_1^{F^2}|}{|T_1^{F^2}|}t^2(1-t)^{-1}(1-tq^2)^{-1}.$$

D'après [L1], table p. 106, on a

$$\frac{|M_1^{F^2}|}{|T_1^{F^2}|} = \frac{q^2(q^4-1)}{q^2+1} = q^2(q^2-1).$$

D'autre part $X(s_2) = \bigcup\limits_{\mathcal{P}_2^F} X'(s_2')$ d'où

$$\sum_{s=1}^{\infty} |X(s_2)^{F^{2s}}| t^s = |\mathcal{P}_2^F| \sum_{s=1}^{\infty} |X'(s_2')^{F^{2s}}| t^s.$$

D'après le théorème 4.1, si M_2 est un groupe de type ${}^2A_2$ et T_2 un tore de Coxeter de M_2, on a

$$\sum_{s=1}^{\infty} |X'(s_2')^{F^{2s}}| t^s = \frac{|M_2^F|}{|T_2^F|} t^3 (1-t)^{-1} (1+tq)^{-1} (1-tq^2)^{-1}.$$

D'après [L1], table p. 106, on a

$$\frac{|M_2^F|}{|T_2^F|} = \frac{q^3(q^2-1)(q^3+1)}{q^2-q+1} = q^3(q^2-1)(q+1).$$

Enfin on a $X(e) = \mathcal{B}^F$ d'où

$$\sum_{s=1}^{\infty} |X(e)^{F^{2s}}| t^s = |\mathcal{B}^F| \sum_{s=1}^{\infty} t^s.$$

Corollaire 8.1 *Les nombres de Betti sont donnés par*

$$\begin{aligned} b_1 = b_3 &= q(q-1)(q^2+1) \\ b_2 &= q^8 + q^6 + q^4 + q^2 + 2 \end{aligned}$$

et la surface $\overline{X}(s_1, s_2)$ atteint la borne de Weil.

Corollaire 8.2

$$|\overline{X}(s_1, s_2)_{\mathbf{F}_{q^2}}| = |\overline{X(s_1 s_2)}_{\mathbf{F}_{q^2}}| = |G^F/B^F| = (q^2+1)(q^3+1)(q^5+1).$$

9 Calcul du diviseur canonique K de $\overline{X}(s_1, s_2)$

On calcule dans cette section
– le nombre d'auto-intersection D^2 d'une droite D pour $D\imath\overline{X}(s_1)$,
– le nombre d'auto-intersection H^2 d'une courbe hermitienne H pour $H\imath\overline{X}(s_2)$,
– le diviseur canonique K de $\overline{X}(s_1, s_2)$,
et on montre que la surface $\overline{X}(s_1, s_2)$ est minimale et est de type général. Par d'autres méthodes S. Hansen a montré récemment dans [HaS] que toutes les variétés de Deligne-Lusztig de type ${}^2A_{2n}$ étaient de type général pour $q > 2$.

Dans cette section, on nommera de la même manière des fonctions à valeurs dans $\overline{k}$ et des morphismes à valeurs dans $\mathbf{P}_1$, liés par le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \overline{k} & \longrightarrow & \mathbf{P}_1 \\ x & \longmapsto & (x:1). \end{array}$$

9.1 Le morphisme c_0

On considère la suite d'applications définies dans le théorème 8.1

$$\begin{array}{ccccc} G/B \simeq \mathcal{B} & \xrightarrow{p} & G/P \simeq \mathbf{P}_4 & \xrightarrow{c_0} & \mathbf{P}_1 \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ \overline{X}(s_1, s_2) & \longrightarrow & \overline{Y} & & \end{array}$$

où on définit le morphisme c_0 de $\mathbf{P}_4$ dans $\mathbf{P}_1$ par

$$c_0(x) = \left(\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_{1,0}}{x_{2,0}} : 1 \right) = (x_1 x_{2,0} - x_2 x_{1,0} : x_2 x_{2,0})$$

avec $x = (x_1 : \ldots : x_5)$ et où $L_0 = (x_{1,0} : x_{2,0} : 0 : 0 : 0)$ est un point fixé de $\mathbf{P}_4^{F^2} \cap \overline{Y}$. Le morphisme c_0 est partout défini, sauf aux points tels que $x_1 = x_2 = 0$.

Lemme 9.1 *La restriction de c_0 à $\overline{Y}$ est partout définie, sauf aux points rationnels sur $\mathbf{F}_{q^2}$ de la courbe H d'équation $x_3^{1+q} + x_4^{1+q} + x_5^{1+q} = 0$ dans le plan $x_1 = x_2 = 0$.*

Démonstration — On cherche l'ensemble des $x \in \overline{Y}$ tels que $x_1 = x_2 = 0$, c'est-à-dire des x dans l'espace $\mathbf{P}_4$ qui vérifient

$$\begin{cases} x_3^{1+q} + x_4^{1+q} + x_5^{1+q} & = 0 \\ x_3^{1+q^3} + x_4^{1+q^3} + x_5^{1+q^3} & = 0 \\ x_1 & = 0 \\ x_2 & = 0. \end{cases}$$

Par le théorème de Bézout, les deux premières équations définissent dans le plan $\mathbf{P}_2$ d'équations $x_1 = x_2 = 0$ deux courbes H et H' qui ont $(1+q)(1+q^3)$ points d'intersection (comptés avec les multiplicités). Les courbes se coupent déjà aux points rationnels de H. Montrons que la multiplicité d'intersection en ces points est $q+1$. Les équations affines des courbes H et H' s'écrivent, après changement de variable sur $\mathbf{F}_{q^2}$ ([St], p. 203)

$$\begin{cases} y + y^q & = x^{q+1} \\ y + y^{q^3} & = x^{q^3+1}. \end{cases}$$

D'après [Sh] p. 225 l'ordre de contact des courbes H et H' au point $(0,0)$ est supérieur ou égal à q car

$$y + y^q - x^{q+1} \equiv y + y^{q^3} - x^{q^3+1} \ (\text{mod. } \mathfrak{m}_{(0,0)}^q)$$

où $\mathfrak{m}_{(0,0)}$ est l'idéal de l'anneau des fonctions régulières au point $(0,0)$ formé des fonctions qui sont nulles en ce point. Donc la multiplicité d'intersection en $(0,0)$ est $(H, H')_{(0,0)} \geq q+1$. C'est vrai pour tous les points de $H(\mathbf{F}_{q^2})$. Le théorème de Bézout impose alors que la multiplicité soit égale à $q+1$ et qu'il n'y ait pas d'autres points d'intersection.

9.1.1 Les zéros de c_0 (sur $\overline{Y} - H$)

Lemme 9.2 *L'ensemble des zéros de c_0 est la réunion des $D_A - \{A\}$ où D_A est la droite joignant L_0 au point $A \in H^{F^2}$.*

Démonstration — On cherche l'ensemble des $x \in \overline{Y} - H$ tels que $c_0(x) = 0$, c'est-à-dire des x dans l'espace $\mathbf{P}_4$ qui vérifient

$$\begin{cases} \langle x, x\rangle & = 0 \\ \langle x, F^2x\rangle & = 0 \\ \dfrac{x_1}{x_2} & = \dfrac{x_{1,0}}{x_{2,0}}. \end{cases} \tag{4}$$

Comme la dernière équation implique $x_1^{q+1} + x_2^{q+1} = x_1^{q^3+1} + x_2^{q^3+1} = 0$. le système (4) est équivalent à

$$\begin{cases} x_3^{1+q} + x_4^{1+q} + x_5^{1+q} & = 0 \\ x_3^{1+q^3} + x_4^{1+q^3} + x_5^{1+q^3} & = 0 \\ \dfrac{x_1}{x_2} & = \dfrac{x_{1,0}}{x_{2,0}}. \end{cases}$$

On a vu que les solutions des deux premières équations, dans le plan $\mathbf{P}_2$ d'équations $x_1 = x_2 = 0$, sont les points rationnels sur $\mathbf{F}_{q^2}$ de la courbe H.
Les solutions du système (4) sont donc

$$\begin{cases} x_1 & = \lambda x_{1,0} \\ x_2 & = \lambda x_{2,0} \\ x_3 & = \mu x_{3,A} \\ x_4 & = \mu x_{4,A} \\ x_5 & = \mu x_{5,A} \end{cases}$$

où $(x_{3,A}, x_{4,A}, x_{5,A})$ sont les coordonnées d'un point A de H^{F^2}, et λ et μ sont dans $\overline{\mathbf{F}}_{q^2}$ avec $\lambda \neq 0$. Ce système admet donc comme solutions dans $\mathbf{P}_4$ la réunion des $D_A - \{A\}$ où D_A est la droite joignant L_0 au point $A \in H^{F^2}$.

9.1.2 Les pôles de c_0

Soit E le sous-espace de $\mathbf{P}_4$ défini par $x_2 = 0$.

Lemme 9.3 *L'ensemble des pôles de c_0 est égal à $E \cap \overline{Y} - H$. L'espace $E \cap \overline{Y}$ est constitué de $(q^3+1)(q+1)$ droites invariantes par F^2 qui se coupent sur les points de $E \cap Y_0$. Par chaque point de $E \cap Y_0$ passent $q+1$ droites de $E \cap \overline{Y}$.*

Démonstration — On cherche l'ensemble des $x \in \overline{Y}$ tels que c_0 ait un pôle ou encore que $x_2 = 0$. On a donc le système dans $\mathbf{P}_4$

$$\begin{cases} \langle x, x\rangle & = 0 \\ \langle x, F^2x\rangle & = 0 \\ x_2 & = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \langle x', x' \rangle & = 0 \\ \langle x', F^2 x' \rangle & = 0 \end{cases}$$

où x' est le point de coordonnées $(x'_1 : x'_3 : x'_4 : x'_5)$ dans E.

On est donc ramené à une situation qu'on a déjà vue au paragraphe 6 relatif au groupe ${}^2A_3$. Notons ici $\overline{Y}'$, $\overline{Y}'_1$, $\mathcal{P}'_1$ ce qui est noté $\overline{Y}$, $\overline{Y}_1$, $\mathcal{P}_1$ dans le chapitre 6. Le système précédent a pour solution le sous-schéma $\overline{Y}'_1$ de $\overline{Y}'$ relatif au groupe ${}^2A_3$. Dans l'étude de la filtration de $\overline{Y}'$ (lemme 6.2) on a montré que le sous-schéma $\overline{Y}'_1$ est la réunion de $|\mathcal{P}'^F_1| = (q^3+1)(q+1)$ droites de $\mathbf{P}_3$. La dernière partie du lemme est alors la conséquence du lemme 6.2.

9.2 Le morphisme f

On désigne par f l'application composée $\overline{X}(s_1, s_2) \xrightarrow{p} \overline{Y} \xrightarrow{c_0} \mathbf{P}_1$.

9.2.1 Le comportement de f sur les courbes H_A

Pour chaque point x de Y_0, soit $H_x = p^{-1}(x)$ la courbe hermitienne image réciproque de x par l'application p.

Proposition 9.1 *Si A est un point défini sur $\mathbf{F}_{q^2}$ de la courbe H, la fonction rationnelle f est régulière et non nulle sur un ouvert de H_A.*

La démonstration va se faire après celle de plusieurs lemmes.

Considérons l'application qui envoie $\mathcal{B}$ dans G/Π où Π est le sous-groupe parabolique

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Les éléments de G/Π correspondent aux drapeaux (V_1, V_2). On définit le morphisme p_2 : $G/\Pi \xrightarrow{p_2} G/P$ par passage aux quotients.

Considérons la variété $X_1(w)$ de Deligne-Lusztig associée au groupe $SL(5, \overline{k})$, à l'endomorphisme F^2, et à l'élément $w = s_1 s_2 s_4 s_3$ du groupe de Weil $\mathbf{W}$ de $SL(5, \overline{k})$. On montre comme dans la proposition 2.3 que c'est une variété lisse, irréductible, de dimension 4, stable par G^{F^2} et définie sur $\mathbf{F}_{q^2}$. Si B est un élément de $X(s_1 s_2)$, par définition $B \xrightarrow{s_1 s_2} FB$. Donc $FB \xrightarrow{s_4 s_3} F^2 B$, puisque $F(s_1 s_2) = s_4 s_3$. Par conséquent $B \xrightarrow{s_1 s_2 s_4 s_3} F^2 B$ d'après la proposition 2.1, autrement dit $B \xrightarrow{w} F^2 B$ donc $B \in X_1(w)$. Notons $\overline{X_2(s_1 s_2)}$ et $\overline{X_2(w)}$

les images de $\overline{X(s_1s_2)}$ et $\overline{X_1(w)}$ dans G/Π. Alors le diagramme suivant est commutatif.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
X(s_1s_2) & \longrightarrow & \overline{X(s_1s_2)} & \longrightarrow & \overline{X_2(s_1s_2)} & \xrightarrow{p_2} & \overline{Y} & & \\
\cap & & \cap & & \cap & & \cap & \overset{c_0}{\searrow} & \\
X_1(w) & \longrightarrow & \overline{X_1(w)} & \longrightarrow & \overline{X_2(w)} & \xrightarrow{p_2} & \mathbf{P}_4 & \xrightarrow{c_0} & \mathbf{P}_1 \\
\cap & & \cap & & \cap & & \| & & \uparrow c_0 \\
\mathcal{B} & = & \mathcal{B} & \longrightarrow & G/\Pi & \xrightarrow{p_2} & G/P & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{P}_4
\end{array}
$$

Lemme 9.4 *L'image réciproque dans $\overline{X_2(w)}$ d'un point de $\mathbf{P}_4(\mathbf{F}_{q^2})$ par p_2 est isomorphe à $\mathbf{P}_3$.*

Démonstration — En effet on montre, comme dans la démonstration de la proposition 5.2, que l'image réciproque du point M est formée de l'ensemble des drapeaux (V_1, V_2) où V_1 correspond à M, c'est-à-dire de l'ensemble des plans de $\overline{k}^5$ contenant une droite donnée passant par l'origine. Elle est donc isomorphe à $\mathbf{P}_3$.

Notons $H_{2,M}$ l'image réciproque dans $\overline{X_2(w)}$ du point M de $\mathbf{P}_4(\mathbf{F}_{q^2})$. Soit c_1 l'application

$$
\begin{array}{cccc}
c_1: & \mathbf{P}_4 & \longrightarrow & \mathbf{P}_1 \\
 & x & \longmapsto & \dfrac{x_3}{x_2}.
\end{array}
$$

Lemme 9.5 *Soit $M = (1:0:0:0:0)$. La fonction rationnelle composée des applications*

$$\overline{X_2(w)} \xrightarrow{p_2} \mathbf{P}_4 \xrightarrow{c_1} \mathbf{P}_1$$

est régulière sur un ouvert de $H_{2,M} \simeq \mathbf{P}_3$, et ses zéros forment un plan $H_{2,M,0}$ dans $H_{2,M}$.

Démonstration — Soit le sous-groupe

$$B = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

dans $\mathcal{B}$. 0n définit un voisinage affine $\mathcal{U} \simeq \mathbf{A}^{10}$ de B dans $\mathcal{B} = G/B$ en prenant les gBg^{-1} avec

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & x_8 & 1 & 0 & 0 \\ x_4 & x_9 & x_{14} & 1 & 0 \\ x_5 & x_{10} & x_{15} & x_{20} & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$gBg^{-1} \in X_1(w) \Longleftrightarrow gBg^{-1} \xrightarrow{w} g^{q^2}Bg^{-q^2}.$$

On vérifie que

$$gBg^{-1} \in \overline{X_1(w)} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_3^{q^2} - x_3 & = & x_8(x_2^{q^2} - x_2) \\ x_4^{q^2} - x_4 & = & x_9(x_2^{q^2} - x_2) \\ x_5^{q^2} - x_5 & = & x_{10}(x_2^{q^2} - x_2) \\ x_9^{q^2} - x_9 & = & x_{14}(x_8^{q^2} - x_8) \\ x_{10}^{q^2} - x_{10} & = & x_{15}(x_8^{q^2} - x_8) \\ x_{15}^{q^2} - x_{15} & = & x_{20}(x_{14}^{q^2} - x_{14}) \\ x_{20} & = & x_{20}^{q^2}. \end{array} \right.$$

Dans ce voisinage $\mathcal{U}$, les applications

$$\mathcal{B} \longrightarrow G/\Pi \xrightarrow{p_2} \mathbf{P}_4$$

deviennent

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{U} \simeq \mathbf{A}^{10} & \rightarrow & \mathbf{A}^7 & \rightarrow & \mathbf{A}^4 \\ (x_2, x_3, x_8, x_4, x_9, x_5, x_{10}, x_{14}, x_{15}, x_{20}) & \mapsto & (x_2, x_3, x_8, x_4, x_9, x_5, x_{10}) & \mapsto & (x_2, x_3, x_4, x_5) \end{array}$$

L'image de B dans $\mathbf{P}_4$ est égale à $M = (1 : 0 : 0 : 0 : 0)$. L'image réciproque de M dans $\mathbf{A}^7$ est donc égale à $(0, 0, x_8, 0, x_9, 0, x_{10})$ où x_8, x_9, x_{10} sont dans $\overline{\mathbf{F}}_q$. 0n a

$$x_3^{q^2} - x_3 = x_8(x_2^{q^2} - x_2)$$

d'où

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{x_8(1 - x_2^{q^2-1})}{1 - x_3^{q^2-1}}.$$

La fonction $g \longmapsto \dfrac{x_3}{x_2}$ est donc régulière au voisinage de $(x_2, x_3, x_8, x_4, x_9, x_5, x_{10}) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, et égale à x_8 sur l'image réciproque de M.

Soit $f_2 = c_0 \circ p_2$ le relèvement de c_0 à $\overline{X_2(w)}$.

Lemme 9.6 *Soit A un point défini sur $\mathbf{F}_{q^2}$ de la courbe H. La fonction rationnelle f_2 est régulière sur un ouvert de $H_{2,A} \simeq \mathbf{P}_3$, et les zéros de f_2 forment un plan $H_{2,A,0}$ dans $H_{2,A}$.*

Démonstration — Il existe un élément

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{pmatrix}$$

du groupe $SL(5, \overline{k})$ qui transforme

– la fonction rationnelle $x \longmapsto \dfrac{x_3}{x_2}$ en la fonction rationnelle $\dfrac{x_1}{x_2}$
– le point $A = (0 : 0 : x_{3,A} : x_{4,A} : x_{5,A})$ en $M = (1 : 0 : 0 : 0 : 0)$
– Le vecteur $v_B = (x_{1,B}, x_{2,B}, x_{3,B}, x_{4,B}, x_{5,B})$ avec $x_{2,B} \neq 0$ en $(0, x_{2,B}, x_{1,B}, *, *)$
Le lemme se déduit alors du précédent, et on a

$$f_2(V_1, V_2) = \frac{x_{1,B}}{x_{2,B}} - \frac{x_{1,0}}{x_{2,0}} = \frac{x_{1,B}x_{1,0} - x_{2,B}x_{2,0}}{x_{2,B}x_{2,0}}$$

si V_1 correspond à A et V_2 est engendré par les vecteurs

$$\begin{array}{rcl} v_A & = & (0, 0, x_{3,A}, x_{4,A}, x_{5,A}) \\ v_B & = & (x_{1,B}, x_{2,B}, x_{3,B}, x_{4,B}, x_{5,B}). \end{array}$$

Lemme 9.7 *La fonction rationnelle f_2 n'est pas nulle sur H_A.*

Démonstration — Les points de H_A correspondent aux sous-espaces V_2 tels que $V_1 \imath V_2 \imath V_2^{\perp} \imath V_1^{\perp}$. Or V_1 est engendré par $v_A = (0, 0, x_{3,A}, x_{4,A}, x_{5,A})$ donc $V_1^{\perp}$ est l'ensemble des points $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de V qui vérifient $x_3 x_{3,A}^q + x_4 x_{4,A}^q + x_5 x_{5,A}^q = 0$, et $H_{2,A,0} \cap V_1^{\perp}$ est l'ensemble des points de V qui vérifient

$$x_3 x_{3,A}^q + x_4 x_{4,A}^q + x_5 x_{5,A}^q = 0 \quad \text{et} \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_{1,0}}{x_{2,0}}.$$

Donc l'espace des (V_1, V_2) tels que V_1 soit engendré par v_A et que $V_2 \imath H_{2,A,0} \cap V_1^{\perp}$ est l'espace projectif associé au quotient $(H_{2,A,0} \cap V_1^{\perp})/V_1$. C'est une droite projective, et une courbe hermitienne ne peut pas être contenue dedans.

Fin de la démonstration de la proposition
Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \overline{X(s_1 s_2)} & \longrightarrow & \overline{X_2(s_1 s_2)} \\ f \searrow & & \swarrow f_2 \\ & \mathbf{P}_1 & \end{array}$$

est commutatif. On en déduit que f est régulière et non nulle sur un ouvert de H_A.

9.2.2 Les zéros de f

On appelle "transformée birationnelle" d'une courbe C sur $\overline{Y}$ la courbe $\widehat{C}$ définie par $\widehat{C} = \overline{p^{-1}(C \cap Y)}$ ([Sh] p. 251). Pour un diviseur premier C sur la surface $\overline{X}(s_1, s_2)$ ou sur $\overline{Y}$, notons v_C la valuation du diviseur C (cf. [Har] p. 130).

Lemme 9.8 *L'ensemble des zéros de f est constitué, pour chaque point A défini sur $\mathbf{F}_{q^2}$ de la courbe H, par les points :*

1. *des transformées birationnelles $\widehat{D_A}$ des droites D_A définies dans le lemme 9.2.*
2. *des courbes hermitiennes H_x pour chaque point x sur $D_A \cap Y_0$ qui n'est pas situé sur H.*

Démonstration — C'est clair.

Soit $\mathcal{D} = \mathrm{div}_+(f)$ le diviseur des zéros de f. Donc

$$\mathcal{D} = \sum_{A \in H^{F^2}} \left(v_{\widehat{D}_A}(f)\widehat{D}_A + \sum_{x \in (D_A \cap Y_0) - A - L_0} v_{H_x}(f) H_x \right) + v_{H_{L_0}}(f) H_{L_0}.$$

9.2.3 Les pôles de f

Lemme 9.9 *Les pôles de f forment le relèvement de $E \cap \overline{Y}_1 - H$ par p. Ce relèvement est constitué de*

1. *$(q^3+1)(q+1)$ droites non concourantes $\widehat{D}$ transformées birationnelles des droites D formant $E \cap \overline{Y}_1$ (cf. lemme 9.3);*
2. *des courbes hermitiennes H_x pour chaque point x sur $E \cap Y_0$ qui n'est pas situé sur H.*

Démonstration — C'est clair.

Soit $\mathcal{D}' = \mathrm{div}_-(f)$ le diviseur des pôles de f. Donc

$$\mathcal{D}' = -\sum_{D \imath E \cap \overline{Y}_1} v_{\widehat{D}}(f)\widehat{D} - \sum_{x \in E \cap Y_0 - H} v_{H_x}(f) H_x.$$

9.3 Calcul de valuations

On considère la droite D de $\mathbf{P}_4$ définie par les équations

$$\begin{cases} x_1 &= \lambda x_{1,1} \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= \lambda \\ x_4 &= \mu x_{4,1} \\ x_5 &= \mu \end{cases}$$

pour $\lambda, \mu \in \overline{\mathbf{F}}_q$, et où $x_{1,1}$ et $x_{4,1}$ sont fixés et vérifient $x_{1,1}^{q+1} = x_{4,1}^{q+1} = -1$. On a $D \imath E \cap \overline{Y}_1 \imath \overline{Y}$.

Lemme 9.10 *La valuation du diviseur $\widehat{D}$ est donnée par $v_{\widehat{D}}(f) = v_D(c_0) = -1$*

Démonstration — La surface $\overline{Y}$ est non singulière en codimension 1, donc la fonction v_D est bien définie (cf. [Sh] p. 152). Elle est de plus définie localement d'où l'égalité $v_{\widehat{D}}(f) = v_D(c_0)$.
Plaçons-nous dans le sous-espace affine $\mathbf{A}_4$ de $\mathbf{P}_4$ défini par l'équation $x_5 = 1$. Les équations de $\overline{Y}$ sont donc

$$\begin{cases} x_1^{q+1} + x_2^{q+1} + x_3^{q+1} + x_4^{q+1} &= -1 \\ x_1^{q^3+1} + x_2^{q^3+1} + x_3^{q^3+1} + x_4^{q^3+1} &= -1. \end{cases}$$

On considère le sous-espace E de $\overline{Y}$ défini par $x_2 = 0$. Les équations de la droite D deviennent

$$\begin{cases} x_1 &= \lambda x_{1,1} \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= \lambda \\ x_4 &= x_{4,1}. \end{cases}$$

Choisissons un point P de D qui ne soit pas singulier (c'est-à-dire $\lambda \notin \mathbf{F}_{q^2}$). Alors au voisinage de P, on peut prendre comme coordonnée locale en P sur $\overline{Y}$ les fonctions : $\epsilon_1 = x_1 - \lambda x_{1,1}$ et $\epsilon_2 = x_2$. En effet, soit $\mathfrak{m}_P$ l'idéal des fonctions régulières nulles en P, et soit $\epsilon_3 = x_3 - \lambda$ et $\epsilon_4 = x_4 - x_{4,1}$. Alors montrons que ϵ_3 et ϵ_4 s'expriment en fonction de ϵ_1 et ϵ_2 modulo $\mathfrak{m}_P^2$. En effet les équations de $\overline{Y}$ s'écrivent

$$\begin{cases} (\epsilon_1 + \lambda x_{1,1})^{q+1} + \epsilon_2^{q+1} + (\epsilon_3 + \lambda)^{q+1} + (\epsilon_4 + x_{4,1})^{q+1} &= -1 \\ (\epsilon_1 + \lambda x_{1,1})^{q^3+1} + \epsilon_2^{q^3+1} + (\epsilon_3 + \lambda)^{q^3+1} + (\epsilon_4 + x_{4,1})^{q^3+1} &= -1 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \epsilon_1 \lambda^q x_{1,1}^q + \epsilon_3 \lambda^q + \epsilon_4 x_{4,1}^q = 0 \\ \epsilon_1 \lambda^{q^3} x_{1,1}^q + \epsilon_3 \lambda^{q^3} + \epsilon_4 x_{4,1}^q = 0 \end{cases} \pmod{\mathfrak{m}_P^2}.$$

Comme le déterminant $\begin{vmatrix} \lambda^q & x_{4,1}^q \\ \lambda^{q^3} & x_{4,1}^q \end{vmatrix}$ est non nul si $\lambda \notin \mathbf{F}_{q^2}$, le système est résoluble en ϵ_3 et ϵ_4.

Exprimons c_0 en fonction de ces coordonnées locales. On a

$$c_0 = \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_{1,0}}{x_{2,0}} = \frac{\epsilon_1 + \lambda x_{1,1}}{\epsilon_2} - \frac{x_{1,0}}{x_{2,0}} = \frac{(\epsilon_1 + \lambda x_{1,1})x_{2,0} - x_{1,0}\epsilon_2}{x_{2,0}\epsilon_2}.$$

D'autre part, D est définie localement par l'équation $\epsilon_2 = 0$. Donc

$$v_D(c_0) = v_D((\epsilon_1 + \lambda x_{1,1})x_{2,0} - x_{1,0}\epsilon_2) - v_D(x_{2,0}\epsilon_2) = -1.$$

Proposition 9.2 *La valuation $v_C(f)$ de C en f est constante quand C parcourt respectivement*

- *les droites formant les pôles de f*
- *les courbes hermitiennes H_x formant les pôles de f.*

Démonstration — Le stabilisateur de f dans G^F contient le sous-groupe de G^F formé des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & \mathrm{SU}(3) & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Point 1 — Montrons que la valuation $v_C(f)$ de C en f est constante quand C parcourt les droites formant les pôles de f.

Les images par p de ces droites sont formées des droites de E dans $\overline{Y}_1$.

On a démontré dans le lemme 9.10 que pour $q+1$ droites passant par le point $(0:0:0:x_{4,1}:1)$ de H on a $v_{\widehat{D}}(f) = -1$. Le stabilisateur de f dans G^F permute les points de H. Donc ces droites sont les $q+1$ droites D qui passent par un point de H. Ces droites sont distinctes car elles ne contiennent qu'un point de H. On obtient donc $(q^3+1)(q+1)$ droites, c'est-à-dire toutes les droites de $E \cap \overline{Y}_1$.

Point 2 — Montrons que la valuation $v_C(f)$ de C en f est constante quand C parcourt les courbes hermitiennes H_x formant les pôles de f.

Ces courbes sont contractées par p en les points des droites de E dans $\overline{Y}_1$ qui ne sont pas dans H, donc elles sont contractées sur $E \cap Y_0 - H$. Il suffit de montrer que le groupe $SU(3)$ opère transitivement sur $E \cap Y_0 - H$.

Le groupe $SU(3)$ opère sur l'espace $E(\mathbf{F}_{q^2}) \simeq \mathbf{P}_3(\mathbf{F}_{q^2})$ (de coordonnées $(x_1 : x_3 : x_4 : x_5)$) par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \mathrm{SU}(3) & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} .$$

L'espace E se décompose en une réunion disjointe $E = E_{\mathbf{A}} \cup E_\infty$ où $E_{\mathbf{A}}$ est l'ouvert $x_1 \neq 0$ et E_∞ est défini par $x_1 = 0$. Le groupe $SU(3)$ opère sur $E_\infty \simeq \mathbf{P}_2(\mathbf{F}_{q^2})$ par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & g & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \end{pmatrix} .$$

Donc le groupe $SU(3)$ opère sur $E_\infty \simeq \mathbf{P}_3(\mathbf{F}_{q^2})$ par l'action projective naturelle. Le groupe $SU(3)$ opère sur $E_{\mathbf{A}} \simeq (\mathbf{F}_{q^2})^3$ par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & g & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ g \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \end{pmatrix} .$$

Donc le groupe $SU(3)$ opère sur $E_{\mathbf{A}} \simeq (\mathbf{F}_{q^2})^3$ par l'action affine naturelle.

Montrons que le groupe $SU(3)$ a deux orbites dans $E \cap Y_0$: $H \imath E_\infty$ et $(E \cap Y_0) - H = (E_{\mathbf{A}} \cap Y_0)$. L'ensemble $E \cap Y_0$ a $(q^3+1)(q^2+1)$ points ; l'ensemble $E_\infty \cap Y_0 = H$ a q^3+1 points. Donc l'ensemble $E_{\mathbf{A}} \cap Y_0 = \mathbf{F}_{q^2}^3 \cap \{(x_3, x_4, x_5) \mid x_3^{q+1} + x_4^{q+1} + x_5^{q+1} + 1 = 0\}$ a $q^2(q^3+1)$ points.

Le groupe $SU(3) = \{A \in SL(3, \mathbf{F}_{q^2}) \mid AA^* = 1\}$ opère sur $(\mathbf{F}_{q^2})^3$ et il conserve la surface hermitienne affine $x_3^{q+1} + x_4^{q+1} + x_5^{q+1} + 1 = 0$. Il suffit donc de montrer que le groupe $SU(3)$ opère transitivement sur les points rationnels sur $\mathbf{F}_{q^2}$ de cette surface. Il suffit pour cela de calculer le stabilisateur d'un point de cette surface, par exemple le point $(\epsilon, 0, 0)$

avec $\epsilon^{q+1} = 0$. On trouve qu'il est égal au groupe formé des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \qquad \text{qui vérifient} \qquad \begin{cases} aa^q + bb^q & = 1 \\ cc^q + dd^q & = 1 \\ ac^q + bd^q & = 0 \\ \ ad - bc & = 1. \end{cases}$$

Donc, si $b = 0$ le système a $q + 1$ solutions :

$$\begin{cases} \quad b = 0 = c \\ \quad a\overline{a} = 1 \\ \quad d = a^q. \end{cases}$$

Si $\lambda = \frac{a}{b}$ est quelconque, (il prend alors $q^2 - q - 1$ valeurs puisque $\lambda\lambda^q \neq -1$), le système a $q + 1$ solutions :

$$\begin{cases} \quad b\overline{b} = (1 + \lambda\lambda^q)^{-1} \\ \quad a = \lambda b \\ \quad c = -b^q \\ \quad d = a^q. \end{cases}$$

En tout on a donc $(q + 1)\,(1 + q^2 - q - 1) = q(q + 1)(q - 1)$ solutions. Donc il y a

$$\frac{\#SU(3)}{\#\text{stabilisateur de } (-1, 0, 0)} = \frac{q^3(q^2 - 1)(q^3 + 1)}{q(q + 1)(q - 1)} = q^2(q^3 + 1) \text{ points dans l'orbite,}$$

donc autant de points que dans $E_{\mathbf{A}} \cap Y_0$.

9.4 Multiplicités d'intersection dans le groupe des diviseurs de $\overline{X}(s_1, s_2)$

9.4.1 Multiplicité d'intersection de D et de H

Soit D une courbe rationnelle dans $\overline{X(s_1)}$, et H_x une courbe hermitienne dans $\overline{X(s_2)}$.

Proposition 9.3 *Si $D\imath\overline{X(s_1)}$ et $H_x\imath\overline{X(s_2)}$ se coupent, on a $(D, H_x) = 1$.*

Démonstration — Il suffit de montrer que les courbes D et H_x se coupent transversalement en un seul point sur la surface $\overline{X}$ et pour cela il suffit de montrer que les images de ces courbes se coupent transversalement en un seul point sur la variété $\mathcal{B} = G/B$.

Soit $M \in D \cap H_x$. Le point M est sur la variété $\mathcal{B}$ et correspond donc à un sous-groupe de Borel B_M , c'est-à-dire à un drapeau (V_1, V_2, V_3, V_4). La courbe H_x correspond (par la proposition 8.4) à un ensemble de drapeaux qui sont tous de la forme $(V_1, *, *, V_4)$, donc à un ensemble de sous-groupes de Borel contenus dans un sous-groupe parabolique P_{H_x} correspondant au drapeau (V_1, V_4). La droite D correspond à un ensemble de drapeaux qui sont tous de la forme $(*, V_2, V_3, *)$, donc à un ensemble de sous-groupes de Borel contenus dans un sous-groupe parabolique P_D correspondant au drapeau (V_2, V_3). On a

$$P_D \cap P_{H_x} = B_M,$$

ce qui montre que le point M est unique. De plus, dans l'algèbre de Lie

$$\mathfrak{p}_D \cap \mathfrak{p}_{H_x} = \mathfrak{b}_M$$

où $\mathfrak{p}_D$, $\mathfrak{p}_{H_x}$ et $\mathfrak{b}_M$ sont les algèbres de Lie de P_D, P_{H_x} et B_M. Par conséquent, l'espace tangent à la droite D et l'espace tangent à la courbe H_x sont distincts. Donc la droite D et la courbe H_x se coupent transversalement et $(D, H_x) = 1$ (cf. [Har] p. 357).

9.4.2 L'auto-intersection d'une droite dans $\overline{X(s_1)}$ et d'une courbe hermitienne dans $\overline{X(s_2)}$

Proposition 9.4 *L'auto-intersection d'une droite dans $\overline{X(s_1)}$ est donnée par*

$$(D, D) = v_{H_x}(f)q^2$$

Démonstration — Soit D une droite de $\overline{X(s_1)}$. Comme G^F opère transitivement sur les droites dans $X(s_1)$, l'auto-intersection ne dépend pas de la droite. On peut donc supposer que $p(D)$ est une droite dans $E \cap \overline{Y}_1$.
On a

$$\left\{\begin{array}{rcl} (\mathcal{D}, D) & = & 0 \\ (\mathcal{D}', D) & = & -v_D(f)(D, D) - \displaystyle\sum_{x \in p(D) \cap (Y_0 - H)} v_{H_x}(f)(H_x, D). \end{array}\right.$$

D'où, d'après les propositions 9.2 et 9.3 et le lemme 9.10 $(D, D) = q^2 v_{H_x}(f)$, où x est un point de $E \cap Y_0 - H$.

Proposition 9.5 *Si $x \in Y_0$ l'auto-intersection d'une courbe hermitienne H_x dans $\overline{X(s_2)}$ est donnée par*

$$(H_x, H_x) = \frac{q+1}{v_{H_x}(f)}.$$

Démonstration — Soit H_x une courbe hermitienne dans $\overline{X(s_2)}$. Comme G^F opère transitivement sur les droites dans $\overline{X(s_2)}$, l'auto-intersection ne dépend pas de la courbe hermitienne. On peut donc supposer que $x \in E \cap Y_0 - H$. On a les relations suivantes.

$$\left\{\begin{array}{rcl} (\mathcal{D}, H_x) & = & 0 \\ (\mathcal{D}', H_x) & = & - \displaystyle\sum_{x \in p(D) \imath E \cap \overline{Y}_1} v_D(f)(D, H_x) - v_{H_x}(f)(H_x, H_x). \end{array}\right.$$

D'où, d'après les propositions 9.2 et 9.3 et les lemmes 9.3 et 9.10

$$v_{H_x}(f)(H_x, H_x) = \sum_{x \in p(D) \imath E \cap \overline{Y}_1} 1 = q + 1$$

Proposition 9.6

$$D^2 H^2 = q^2(q+1).$$

Démonstration — Cela résulte des deux propositions précédentes.

9.5 Les diviseurs sur $\overline{X}$ invariants par G^F

Notons dans ce paragraghe $\overline{X} = \overline{X}(s_1, s_2)$ et $X = X(s_1 s_2)$. Soit $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ le groupe de Picard de $\overline{X}$. Rappelons la définition du morphisme de groupes

$$\eta : \mathrm{Pic}(\overline{X}) \longrightarrow H^2(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$$

(cf. [Har] p. 454 §3.8 ou [SGA] (exposé [Cycle])). Soit C un diviseur premier de $\overline{X}$; la restriction $H^2(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell) \longrightarrow H^2(C, \mathbf{Q}_\ell) \simeq \mathbf{Q}_\ell$ définit une forme linéaire sur $H^2(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ donc par dualité de Poincaré un élément $\eta(C)$ de $H^2(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$. On prolonge cette application η à $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ par linéarité. La forme d'intersection devient le cup-produit

$$(C, C') \longrightarrow \eta(C) \cup \eta(C') \in H^4(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell) \simeq \mathbf{Q}_\ell.$$

Proposition 9.7 *Les sommes $\sum \eta(D)$ où D parcourt les droites dans $\overline{X(s_1)}$ et $\sum \eta(H)$ où H parcourt les courbes hermitiennes dans $\overline{X(s_2)}$ constituent une base de $H^2(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)^{G^F}$.*

Démonstration — L'inclusion $\overline{X(s_1)} \cup \overline{X(s_2)} \longrightarrow \overline{X}$ induit une application linéaire

$$H^2(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell) \longrightarrow H^2(\overline{X(s_1)}, \mathbf{Q}_\ell) \oplus H^2(\overline{X(s_2)}, \mathbf{Q}_\ell)$$

d'où une application

$$H^2(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)^{G^F} \longrightarrow H^2(\overline{X(s_1)}, \mathbf{Q}_\ell)^{G^F} \oplus H^2(\overline{X(s_2)}, \mathbf{Q}_\ell)^{G^F}$$

en passant aux espaces des éléments invariants par G^F.
Posons $Z = \overline{X(s_1)} \cup \overline{X(s_2)} = X(s_1) \cup X(s_2) \cup X(e)$. Notons $H^i_c(X)$ la cohomologie ℓ-adique de X à supports propres en dimension i et $H^i(\ .\ ) = H^i(\ .\ , \mathbf{Q}_\ell)$. La suite exacte longue associée à la paire $(Z, X(e))$ donne

$$H^1(X(e)) \to H^2_c(X(s_1)) \oplus H^2_c(X(s_2)) \to H^2(Z) \to H^2(X(e)).$$

Le schéma $X(e)$ est de dimension 0, donc $H^1(X(e)) = H^2(X(e)) = 0$. Par conséquent

$$H^2_c(X(s_1)) \oplus H^2_c(X(s_2)) \simeq H^2(Z).$$

Considérons la suite exacte longue associée à la paire $(\overline{X(s_1)}, X(e))$:

$$H^1(X(e)) \to H^2_c(X(s_1)) \to H^2(\overline{X(s_1)}) \to H^2(X(e)).$$

Comme on a encore $H^1(X(e)) = H^2(X(e)) = 0$, on a

$$H^2_c(X(s_1)) \simeq H^2(\overline{X(s_1)})$$

De même

$$H^2_c(X(s_2)) \simeq H^2(\overline{X(s_2)}).$$

Finalement

$$H^2(Z) \simeq H^2(\overline{X(s_1)}) \oplus H^2(\overline{X(s_2)}).$$

Considérons maintenant la suite exacte longue associée à la paire $(\overline{X}, Z)$

$$H_c^2(X) \to H^2(\overline{X}) \to H^2(Z) \to H_c^3(X).$$

Si on prend les invariants sous G^F, on obtient

$$H_c^2(X)^{G^F} \to H^2(\overline{X})^{G^F} \to H^2(Z)^{G^F} \to H_c^3(X)^{G^F}$$

Or $H_c^i(X)^{G^F} = H_c^i(G^F\backslash X)$ (cf. [Sr], p. 53) et par la proposition 2.2

$$G^F\backslash X(s_1s_2) = G^F\backslash\{x \in G \mid x^{-1}F(x) \in Bs_1s_2B\}/B = Bs_1s_2B/B.$$

Ce dernier espace est un espace affine de dimension 2, donc $H_c^2(X)^{G^F} = H_c^3(X)^{G^F} = 0$. Par conséquent

$$H^2(\overline{X})^{G^F} \simeq H^2(Z)^{G^F}.$$

La variété $\overline{X(s_1)}$ est réunion disjointe de droites D pour $D\imath\overline{X(s_1)}$. L'espace $H^2(\overline{X(s_1)}, \mathbf{Q}_\ell)$ est donc somme des espaces $H^2(D, \mathbf{Q}_\ell)$ de dimension 1. Le groupe G^F permute transitivement ces composantes. Donc $\sum_{D\imath\overline{X(s_1)}} \eta(D)$ forme une base de l'espace

$$H^2(\overline{X(s_1)}, \mathbf{Q}_\ell)^{G^F} \simeq \left(\bigoplus_{D\imath\overline{X(s_1)}} H^2(D, \mathbf{Q}_\ell)\right)^{G^F} \simeq \mathbf{Q}_\ell.$$

De même $\sum_{H\imath\overline{X(s_2)}} \eta(H)$ forme une base de l'espace

$$H^2(\overline{X(s_2)}, \mathbf{Q}_\ell)^{G^F} \simeq \left(\bigoplus_{H\imath\overline{X(s_2)}} H^2(H, \mathbf{Q}_\ell)\right)^{G^F} \simeq \mathbf{Q}_\ell.$$

Par conséquent

$$H^2(\overline{X})^{G^F} \simeq H^2(Z)^{G^F} \simeq H^2(\overline{X(s_1)})^{G^F} \oplus H^2(\overline{X(s_2)})^{G^F}$$

et c'est un espace vectoriel de dimension 2.

9.6 Diviseur canonique

9.6.1 Calcul de la classe fondamentale $\eta(K)$ de $\overline{X}$

Soit K le diviseur canonique de la surface $\overline{X}$. Sa classe est invariante par G^F. Donc

$$\eta(K) = \alpha \sum_{D\imath\overline{X(s_1)}} \eta(D) + \beta \sum_{H\imath\overline{X(s_2)}} \eta(H). \tag{5}$$

La formule d'adjonction ([Har], chapitre V, proposition 1.5, p. 361) implique

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2 & = & D.(D+K) \\ q^2-q-2 & = & H.(H+K) \end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{array}{rcl} D.K & = & -D^2-2 \\ H.K & = & q^2-q-2-H^2. \end{array}\right.$$

Donc

$$\left\{\begin{array}{ll} \eta(D)\cup\eta(K) & = -D^2-2 \\ \eta(H)\cup\eta(K) & = q^2-q-2-H^2. \end{array}\right.$$

Ce qui donne, en utilisant (5)

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha D^2+\beta(q^2+1) & = -D^2-2 \\ \alpha(q^3+1)+\beta H^2 & = q^2-q-2-H^2. \end{array}\right.$$

D'après les calculs d'auto-intersection faits plus haut et en posant $v_{H_x}(f)=v$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} D^2 & = & -vq^2 \\ H^2 & = & -(q+1)/v \end{array}\right.$$

on peut résoudre les équations en α et β. On obtient

$$\eta(K)=\frac{q^4v-qv-2v+q^3+q^2-q-1}{q^5v+v}\sum_{D\subset X(s_1)}\eta(D)+\frac{(q+1)\,(q^4v-q^2v-q^2+2q-2)}{q^5+1}\sum_{H\subset X(s_2)}\eta(H).$$

Comme $v\geq 1$, on vérifie que $\alpha>0$ et $\beta>0$ pour $q\geq 2$.

9.6.2 Conséquences

Théorème 9.1 *La surface $\overline{X}(s_1,s_2)$ est minimale.*

Démonstration — Si C est un diviseur premier sur la surface $\overline{X}(s_1,s_2)$, on a

$$(K,C)=\alpha\sum_{D\subset\overline{X(s_1)}}(D,C)+\beta\sum_{H\subset\overline{X(s_2)}}(H,C)\geq 0$$

et par la formule d'adjonction, en notant g le genre de la courbe C :

$$(K,C)=2g-2-C^2.$$

Si la surface $\overline{X}(s_1,s_2)$ n'était pas minimale, elle contiendrait une courbe exceptionnelle de première espèce ([Har], chapitre V, §5), c'est-à-dire une courbe rationnelle C telle que $C^2=-1$. On aurait donc

$$(K,C)=2g-2-C^2=-1.$$

C'est impossible. Donc la surface $\overline{X}(s_1,s_2)$ est minimale.

Théorème 9.2 *La surface $\overline{X}(s_1,s_2)$ est de type général.*

Démonstration — On a

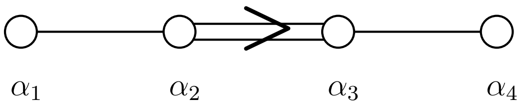
$$K^2 = \frac{1}{v}(q+1)^2\Big(v^2\left(2q^7-4q^6+3q^5-4q^4+2q^3\right)$$
$$+v\left(2q^6-4q^5+8q^4-12q^3+14q^2-12q+8\right)-3q^4+4q^3-3q^2\Big).$$

Donc $K^2 > 0$ pour $q \geq 2$ et $v \geq 1$.
Comme on a aussi $K.C \geq 0$ pour tout diviseur primitif, la dimension de Kodaira κ de $\overline{X}$ est égale à 2 (théorème 5.4 de [B-H]) c'est-à-dire que la surface $\overline{X}(s_1,s_2)$ est de type général.

10 Cas ${}^2F_4$

10.1 Le groupe ${}^2F_4$

Supposons $p = 2$. Soit G un groupe semi-simple défini sur $\mathbf{F}_{q^2}$ dont le système de racine est de type F_4. Le graphe de Dynkin de ce système de racine est le suivant.



Soit s_i les éléments de S qui correspondent aux racines simples α_i.
Supposons $q^2 = 2^{2m+1}$. Il existe alors un endomorphisme F de G qui conserve les sous-groupes B et T et qui, dans l'ensemble des caractères de T, transforme une racine simple courte en un multiple d'une racine simple longue :

$$\begin{array}{lcll} \alpha & \longrightarrow & 2^{m+1}\alpha & \text{si } \alpha \text{ est courte,} \\ \alpha & \longrightarrow & 2^{m}\alpha & \text{si } \alpha \text{ est longue.} \end{array}$$

Le groupe G^F est un groupe fini de type ${}^2F_4$. Voir [C2] 1.19).

10.2 La fonction zêta de $\overline{X} = \overline{X}(s_1,s_2)$

Théorème 10.1 *La fonction zêta de $\overline{X} = \overline{X}(s_1,s_2)$ sur $\mathbf{F}_{q^2}$ est donnée par*

$$Z(t) = \frac{(1+\sqrt{2}\,q\,t+q^2\,t^2)^{n_1}(1+\sqrt{2}\,q^3\,t+q^6\,t^2)^{n_3}}{(1-t)(1-q^2\,t)^{m_1}\,(1+q^2\,t)^{m_2}\,(1+q^4\,t^2)^{m_3}\,(1-q^2\,t+q^4\,t^2)^{m_4}(1-q^4t)}$$

avec $\quad n_1 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}q\,\left(q^4-1\right)\,\left(q^6+1\right) \quad$ *et*

$$\begin{array}{rcl} m_1 & = & \frac{1}{4}\left(q^6+1\right)\left(4\,q^{16}+3\,q^{14}+\sqrt{2}\,q^{13}+6\,q^{12}+q^{10}-2^{\frac{3}{2}}\,q^9+q^8-2\,q^6+\sqrt{2}\,q^5+3\,q^4+4\,q^2+8\right), \\ m_2 & = & \frac{1}{12}q^4\left(q^2-1\right)^2\,\left(q^4-q^2+1\right)\,\left(q^4+\sqrt{2}\,q^3+q^2+\sqrt{2}\,q+1\right)\,\left(q^4+2^{\frac{3}{2}}\,q^3+4\,q^2+2^{\frac{3}{2}}\,q+1\right), \\ m_3 & = & \frac{1}{4}q^4\left(q^2-1\right)^2\left(q^2+1\right)^2\,\left(q^4-q^2+1\right)\,\left(q^4+\sqrt{2}\,q^3+q^2+\sqrt{2}\,q+1\right), \\ m_4 & = & \frac{1}{3}q^4\left(q^2-1\right)^2\left(q^2+1\right)^2\left(q^4+1\right)^2. \end{array}$$

Démonstration — D'après la section 4

$$t\frac{Z'}{Z} = t(\log Z)' = \sum_{s=1}^{\infty} |X(s_1s_2)^{F^{2s}}|t^s + \sum_{s=1}^{\infty} |X(s_1)^{F^{2s}}|t^s + \sum_{s=1}^{\infty} |X(s_2)^{F^{2s}}|t^s + \sum_{s=1}^{\infty} |X(e)^{F^{2s}}|t^s$$

D'après le théorème 4.1, si T est un tore de Coxeter de G, on a

$$\sum_{s=1}^{\infty} |X(s_1s_2)^{F^{2s}}|t^s = \frac{|G^F|}{|T^F|}t^{12}\prod_j (1-t\lambda_j)^{-1}.$$

D'après [L1], table p. 106, $\frac{|G^F|}{|T^F|}$ est égal à

$$\begin{aligned}\frac{|G^F|}{|T^F|} &= \frac{q^{24}(q^2-1)(q^6+1)(q^8-1)(q^{12}+1)}{q^4-q^3\sqrt{2}+q^2-q\sqrt{2}+1} \\ &= q^{24}(q^2-1)(q^4+1)(q^6+1)(q^8-1)(q^4+q^3\sqrt{2}+q^2+q\sqrt{2}+1).\end{aligned}$$

Les λ_j sont donnés par

$$1, \frac{i-1}{\sqrt{2}}q, \frac{-i-1}{\sqrt{2}}q, -q^2, iq^2, -iq^2, -\theta q^2, -\theta^2 q^2, q^2, \frac{i-1}{\sqrt{2}}q^3, \frac{-i-1}{\sqrt{2}}q^3, q^4,$$

où θ est une racine primitive troisième de l'unité.
Le calcul des $X(s_i)$ se fait grâce à l'argument d'induction de Lusztig (proposition 2.6). On définit les classes de conjugaison invariantes par F de sous-groupes paraboliques $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ associés aux classes $\{s_1, s_4\}$ et $\{s_2, s_3\}$ comme dans le paragraphe 2.3.1. D'après [C2], chapitre 2

$$\begin{aligned}|\mathcal{P}_1^F| = |G^F/P_1^F| &= (q^{12}+1)(q^6+1)(q^4+1) \\ |\mathcal{P}_2^F| = |G^F/P_2^F| &= (q^{12}+1)(q^6+1)(q^2+1).\end{aligned}$$

Donc, d'après la proposition 2.6, $X(s_1)$ est isomorphe à $\bigcup_{G^F/P_1^F} X'(s_1')$, d'où

$$\sum_{s=1}^{\infty} |X(s_1)^{F^{2s}}|t^s = |G^F/P_1^F| \sum_{s=1}^{\infty} |X'(s_1')^{F^{2s}}|t^s.$$

Le calcul de $\sum_{s=1}^{\infty} |X'(s_1')^{F^{2s}}|t^s$ est le même que dans le cas de ${}^2A_4$.
De même $X(s_2)$ est isomorphe à $\bigcup_{G^F/P_2^F} X'(s_2')$, d'où

$$\sum_{s=1}^{\infty} |X(s_2)^{F^{2s}}|t^s = |G^F/P_2^F| \sum_{s=1}^{\infty} |X'(s_2')^{F^{2s}}|t^s.$$

D'après le théorème 4.1, si M_2 est un groupe de type ${}^2B_2$ et T_2 un tore de Coxeter de M_2 , on a

$$\sum_{s=1}^{\infty} |X'(s_2')^{F^{2s}}|t^s = \frac{|M_2^F|}{|T_2^F|}t^4(1-t)^{-1}(1-\frac{i-1}{\sqrt{2}}tq)^{-1}(1+\frac{i+1}{\sqrt{2}}tq)^{-1}(1-tq^2)^{-1}.$$

D'après [L1], table p.106, on a

$$\frac{|M_2^F|}{|T_2^F|} = \frac{q^4(q^2-1)(q^4+1)}{q^2-q\sqrt{2}+1} = q^4(q^2-1)(q^2+q\sqrt{2}+1).$$

Enfin $X(e) = G^F/B^F$ d'où

$$\sum_{s=1}^{\infty} |X(e)^{F^{2s}}| t^s = |G^F/B^F| \sum_{s=1}^{\infty} t^s$$

avec

$$|G^F/B^F| = (1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)(1+q^{12}).$$

Corollaire 10.1 *Les nombres de Betti sont*

$$\begin{aligned} b_1 &= \sqrt{2}q\left(q^4-1\right)\left(q^6+1\right) \\ b_2 &= q^{22}+2q^{20}+\sqrt{2}q^{19}+2q^{18}-2\sqrt{2}q^{15}+q^{14}+\sqrt{2}q^{13}+\sqrt{2}q^{11}+q^{10} \\ &\quad -2\sqrt{2}q^9+2q^6+\sqrt{2}q^5+2q^4+q^2+2. \end{aligned}$$

Le nombre de points définis sur $\mathbf{F}_{q^2}$ *de la surface de Deligne-Lusztig est*

$$|\overline{X}^{F^2}| = (q^{12}+1)(q^6+1)(q^4+1)(q^2+1).$$

10.3 La variété $\overline{Y}$

On remarque que la variété $\overline{X}$ n'atteint pas la borne de Weil-Deligne. Mais on va modifier légèrement la définition de $\overline{X}$ pour obtenir une variété $\overline{Y}$ qui atteigne une borne maximale relative.

La variété $\overline{X}$ contient le sous-schéma $\overline{X(s_1)}$ qui est la réunion disjointe de $|G^F/P_1^F|$ courbes isomorphes à $\mathbf{P}_1$ (cf. proposition 2.6).

Proposition 10.1 *Il existe une surface* $\overline{Y}$ *et un homomorphisme* p *de* $\overline{X}$ *dans* $\overline{Y}$ *tels que chaque courbe isomorphe à* $\mathbf{P}_1$ *dans* $\overline{X(s_1)}$ *soit envoyée par* p *sur un point de* $\overline{Y}$ *et que*

$$p : \overline{X} - \overline{X(s_1)} \longrightarrow \overline{Y} - p(\overline{X(s_1)})$$

soit un isomorphisme.

Démonstration — D'après [Har] remarque 5.7.2 p. 417.

Remarque 10.1 $\overline{Y}$ est une surface éventuellement singulière.

Lemme 10.1 *Soit* $f : Z \longrightarrow Z_0$ *un morphisme de variétés algébriques défini sur* $\mathbf{F}_{q^2}$ *et* P *un point rationnel tel que* $f : Z - f^{-1}(P) \longrightarrow Z_0 - P$ *soit un isomorphisme et que* $f^{-1}(P)$ *soit isomorphe à* $\mathbf{P}_1$*. Alors*

$$\#Z^{F^s} = \#Z_0^{F^s} + q^{2s}$$

Démonstration — C'est clair.

Proposition 10.2 *La variété $\overline{Y}$ vérifie une formule du type (1).*

Soit $N_s = \#\overline{X(s_1 s_2)}^{F^{2s}}$, $N'_s = \#\overline{Y}^{F^{2s}}$. D'après le § 3.2 la formule donnant Z permet de calculer les valeurs des $\omega_{i,j}$, donc la valeur des N_s.
On a

$$\begin{aligned}
N'_s &= N_s - q^{2s}|G^F/P_2^F| \\
&= 1 + q^{4s} - (q^s + q^{3s})\sum_{j=1}^{b_1}\omega_{j,1}^s + q^{2s}\sum_{j=1}^{b_2}\omega_{j,2}^s - q^{2s}|G^F/P_2^F| \\
&= 1 + q^{4s} + (q^s + q^{3s})S_{1,s} - q^{2s}S'_{2,s}
\end{aligned}$$

en posant $S_{i,s} = -\sum_{j=1}^{b_i}\omega_{j,i}^s$ et $S'_{2,s} = S_{2,s} + |G^F/P_2^F|$.

Théorème 10.2 *La variété $\overline{Y}$ a le nombre maximum de points sur $\mathbf{F}_{q^2}$ parmi les variétés vérifiant une formule du type (1), avec le même nombre b_1 et des sommes $S_{2,1}$ et $S_{2,2}$ au plus égales à celles de $\overline{Y}$.*

Démonstration — D'après le calcul de la fonction Z,

$$\begin{aligned}
N_1 &= (1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)(1+q^{12}), \\
N_2 &= (1+q^4)^2(1+q^6)(1+q^{12}),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
N'_1 &= N_1 - (1+q^4)(1+q^6)(1+q^{12})q^2 = (1+q^4)(1+q^6)(1+q^{12}), \\
N'_2 &= N_2 - (1+q^4)(1+q^6)(1+q^{12})q^4 = (1+q^4)(1+q^6)(1+q^{12}).
\end{aligned}$$

Utilisons les "formules explicites" (cf. 3.3) en prenant $v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $v_2 = \frac{1}{4}$, d'où

$$\begin{aligned}
f_v(\theta) &= 1 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 2\theta\right) \geq 0, \\
\chi_v(t) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t^2}{t+t^{-1}} + \frac{1}{4}\frac{t^4}{t^2+t^{-2}}.
\end{aligned}$$

D'après la valeur de la fonction Z on a $\omega_{j,1} = \pm\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ donc

$$S_{1,1} = -n_1\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}} + \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right) = b_1\sqrt{2}/2 \quad \text{et} \quad S_{1,2} = 0.$$

D'autre part

$$
\begin{aligned}
S_{1,1} &= \frac{1}{q+q^3}(N_1' - 1 - q^4 + q^2 S_{2,1}'),\\
S_{1,2} &= \frac{1}{q^2+q^6}(N_2' - 1 - q^8 + q^4 S_{2,2}').
\end{aligned}
$$

Donc, d'après la proposition 3.2, le nombre maximal de points N'_{max} que peut avoir une surface avec le même nombre b_1 et des sommes $S_{2,1}$ et $S_{2,2}$ au plus égales à celles de $\overline{Y}$ est donné par

$$
\begin{aligned}
(N'_{max} - 1)\chi_v(q^{-1}) &= \frac{b_1}{2} - \sum_1^\infty v_n \frac{1}{q^{-n}+q^n} S_{2,n}' + \chi_v(q^n)\\
&= S_{1,1}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{q^{-1}+q}S_{2,1}' - \frac{1}{4}\frac{1}{q^{-2}+q^2}S_{2,2}' + \chi_v(q)\\
&= (N_1' - 1)\chi_v(q^{-1})
\end{aligned}
$$

d'après les formules plus haut. Pour la valeur de v choisie, on obtient donc une égalité

$$N_1' = N'_{max}.$$

Donc la variété $\overline{Y}$ a le nombre maximum de points, parmi les surfaces qui ont le même nombre b_1 et des sommes $S_{2,1}$ et $S_{2,2}$ au plus égales à celles de $\overline{Y}$.

Appendice

On décrit dans le premier tableau des surfaces $\overline{Y}$ qui sont obtenues comme complétions des surfaces de Deligne-Lusztig d'un groupe de type donné. On donne dans le tableau 2 le nombre de points et les nombres de Betti de ces surfaces $\overline{Y}$.

Type	Description de la surface $\overline{Y}$
$A_2(\mathbf{F}_q)$	Plan projectif $\mathbf{P}_2$
$C_2(\mathbf{F}_q)$	Surface hermitienne tordue
${}^2A_3(\mathbf{F}_{q^2})$	Surface hermitienne
${}^2A_4(\mathbf{F}_{q^2})$	$\overline{X}(s_1, s_2)$
${}^2F_4(\mathbf{F}_{q^2})$	$\overline{X}(s_1, s_2)$

Tableau 1

Type	$\mathrm{N}(\overline{Y})$	b_1	b_2
$A_2(\mathbf{F}_q)$	q^2+q+1	0	1
$C_2(\mathbf{F}_q)$	$(q^2+1)(q+1)$	0	q^3-q^2+q+1
${}^2A_3(\mathbf{F}_{q^2})$	$(q^3+1)(q^2+1)$	0	q^3-q^2+q+1
${}^2A_4(\mathbf{F}_{q^2})$	$(q^2+1)(q^3+1)(q^5+1)$	$q(q-1)(q^2+1)$	$q^8+q^6+q^4+q^2+2$
${}^2F_4(\mathbf{F}_{q^2})$	$(q^{12}+1)(q^6+1)(q^4+1)(q^2+1)$	$\sqrt{2}q\ (q^4-1)\ (q^6+1)$	$q^{22}+2q^{20}+\sqrt{2}q^{19}+2q^{18}-2\sqrt{2}q^{15}$ $+q^{14}+\sqrt{2}q^{13}+\sqrt{2}q^{11}+q^{10}-2\sqrt{2}q^9$ $+2q^6+\sqrt{2}q^5+2q^4+q^2+2$

Tableau 2

Références

[B-C] R.C. Bose, I.M. Chakravarti, Hermitian varieties in a finite projective space $PG(N, q^2)$, *Canad. J. of Math.*, (1966), 1161-1182.

[B-H] E. Bombieri, D. Husemoller, Classification and embedding of surfaces, *in* "Proc. of Symp. in Pure Math.," Vol. 29, American mathematical society, Providence, 1975.

[B-M] E. Bombieri, D. Mumford, Enriques' classification of surfaces in char P : II, *in* "Complex Analysis and Algebraic Geometry," Cambridge University Press, Cambridge, 1977.

[C1] R.W. Carter, "Simple groups of Lie type," John Wiley and sons Ltd, New York, 1972.

[C2] R.W. Carter, "Finite groups of Lie type," John Wiley and sons Ltd, New York, 1985.

[D] P. Deligne, La conjecture de Weil I, *Publ. Math. I.H.E.S.* **43**, (1974), 273-307.

[SGA] P. Deligne, "Cohomologie étale, SGA $4\frac{1}{2}$," Lecture Notes in Math., Vol. 569, Springer-Verlag, Heidelberg, 1977.

[D-L] P. Deligne, G. Lusztig, Representation of reductive groups over finite fields, *Annals of Math.,* **103**, (1976), 103-161.

[D-M] F. Digne, J. Michel, Fonction L des variétés de Deligne-Lusztig et descente de Shintani, "Mém. Soc. Math. France," **20**, (1985) .

[HaJ] J.P. Hansen, Deligne-Lusztig Varietes and Group Codes, *in* "Coding Theory and Algebraic Geometry," Lecture Notes in Math., Vol. 1518, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[HaS] S.H. Hansen, "Canonical bundles of Deligne-Lusztig varieties," Manuscripta Math. 98, 1999, 363-375.

[Har] R. Hartshorne, "Algebraic geometry," Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[H-T] J.W.P. Hirschfeld, J.A. Thas, "General Galois Geometry," Oxford University Press, Oxford, 1991.

[Hu] J.E. Humphreys, "Linear Algebraic groups," Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[I-R] K. Ireland, M. Rosen, "A Classical Introduction to Modern Number Theory," Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[L-T] G. Lachaud, M. Tsfasman, Formules Explicites pour le Nombre de points des variétés sur un corps fini, *J. Reine Angew. Math.* **493** (1997), 1-60

[L1] G. Lusztig, Coxeter Orbits and Eigenspaces of Frobenius, *Inventiones Math.,* **38**, (1976), 101-156.

[L2] G. Lusztig, On the Green polynomials of classical groups, *Proc. London Math. Soc. (3),* **33**, (1976), 443-475.

[M-V] Y. Manin, S. Vladut, Codes linéaires et courbes modulaires, *Itogi nauki i techniki,* **25**, (1984), 209-257 ; trad. anglaise *J. Soviet Math.,* **30**, (1985), 2611-2643. ; trad. française Pub. Univ. Pierre et Marie Curie, n° 72, 1985.

[Mu] D. Mumford, Enriques' classification of surfaces in char P : I, *in* "Global Analysis," Univ. Tokyo Press and Princeton Univ. Press, 1969, 325-339.

[R] F. Rodier, Nombre de points des surfaces de Deligne-Lusztig, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 322, Série I, (1996), 563-566.

[Se] J-P. Serre, Résumé des cours de 1983-1984, *in* "Annuaire du Collège de France," Paris, 1984, 79-83 ; = *Œuvres,* III, n° 132, 701-705.

[Sh] I.R. Shafarevitch, "Basic Algebraic geometry 1," Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Sr] B. Srinivasan, Representations of Finite Chevalley Groups, Lecture Notes in Math., Vol. 764, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[St] H. Stichtenoth , "Algebraic Function Fields and Codes," Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[T] M. Tsfasman, Nombre de points des surfaces sur un corps fini, *in* "Arithmetic, Geometry and Coding Theory," Proceedings of the International Conference held at Centre International de Rencontres Mathématiques (1993), éditeurs : R. Pellikaan, M. Perret, S.G. Vladut, Walter de Gruyter, Berlin, 1996.

[W] A. Weil, Number of solutions of equations in finite fields, *Bull. Amer. Math. Soc.* **55**, (1949), 497-507 ; = *Œuvres Scient.*, [1949b], vol. I, 399-410.