Définitions :

Une valuation de Q :

$$val\_p(z) = \max\{n \in \mathbf{N}, p^n | z\}$$

$$val\_p\left(\frac{u}{v}\right) = val\_p(u) - val\_p(v)$$

$$val\_p(0) = \infty$$

On a les propriétés suivantes :

$$val\_p(xy) = val\_p(x) + val\_p(y)$$

$$val\_p(x+y) \geq \inf[val\_p(x), val\_p(y)]$$

On peut associer une norme à cette valuation :

$$|x|_p = \frac{1}{p^{val\_p(x)}}$$

Une propriété intéressante :

$$\boxed{|x+y|_p \leq \sup(|x|_p, |y|_p)}$$

On dit que cette norme est non Archimédienne et que la métrique qui en découle est ultra-métrique.

On complète alors Q par cette norme pour obtenir le cops p-adique Q_p. On étend la norme à Q_p de la manière habituelle.

Exemples :

$$val\_3(45) = val\_3(3^2 * 5) = 2$$

$$|45|_3 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

La distance de deux nombres x et y est $|x-y|_p$
Plus leur différence est divisible par p, plus ils sont proches l'un de l'autres.

Ainsi en 3-adique :
$|47-2|_3 = \frac{1}{9}$ tandis que $\left|2-\frac{4}{3}\right|_3 = \frac{1}{3^{-1}} = 3$
Dans la métrique 3-addique 47 est beaucoup plus proche de 2 que 4/3 !
Mieux encore, « $p^\infty = 0$ » tandis que « $\frac{1}{p^\infty} = \infty$ »

Dans Q, la boule unité est l'ensemble des x tels que $|x|_p \leq 1$
C'est donc l'ensemble des x tels que $val\_p(x) \geq 0$
En particulier, Z en fait partie.

Représentation « décimale » :

On appelle entier p-adique les nombres appartenant à la boule unité dans Q_p. On note Z_p l'ensemble des entiers p-adiques.

Soit x un entier p-adique. Il s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{i=0}^{\infty} a_i * p^i$ avec $\forall i \; 0 \leq a_i \leq p-1$

Si $x \in Q_p$ avec $val\_p(x) = n < 0$ alors $p^n * x \in Z_p$

Alors $x = \sum_{i=-n}^{\infty} a_i * p^i$

On note alors $x = a_{-n} \ldots a_{-1} . a_0 a_1 \ldots$

Exemples :

Si $x \in N$ alors sa représentation « décimale » est le miroir de sa représentation en base p.
Par exemple en 2-adique, $6 = \overline{1}\,\overline{1}\,\overline{0}^2 = 0.011$

On a $(p-1)+(p-1)*p+(p-1)*p^2+\ldots=(p-1)*\frac{1-p^\infty}{1-p}=-1$

Donc en 2-adique $-1 = 1+2+2^2+2^3+\ldots = 0.1111\ldots$

Cette représentation permet d'effectuer simplement les opérations élémentaires.

Par exemple en 3-adique,
$$\frac{24}{17} = \frac{2*3+2*9}{2+2*3+1*9} = 1*3+1*3^3+2*3^5+1*3^7+1*3^8+2*3^9\ldots$$
Soit $\frac{24}{17} = \frac{0.022}{0.221} = 0.0101020112\ldots$

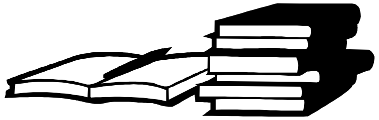
Mais toute la puissance de cette notation vient qu'on peut facilement calculer une valeur approchée de la racine d'un polynôme.

Par exemple en 7-adique, pour résoudre l'équation $X^2 = 2$,
on pose $X = a_0 + a_1 * 7 + a_2 * 7^2 \ldots$

On a $X^2 \equiv 2[7] \Rightarrow a_0^2 \equiv 2[7] \Rightarrow a_0 = 3$ ou $a_0 = 4$
Si on prend $a_0 = 3$:
$$X^2 \equiv 2\left[7^2\right] \Rightarrow (a_0 + a_1 * 7)^2 \equiv 2\left[7^2\right] \Rightarrow 9 + 42 * a_1 \equiv 2\left[7^2\right]$$
$$\Rightarrow 1 + 6 * a_1 \equiv 0[7] \Rightarrow a_1 = 1$$

On itère et on trouve $x_1 = 3+1*7+2*49+6*343... = 0.3126...$

Si on avait pris $a_0 = 4$ on aurait trouvé $x_2 = 0.4540... = -x_1$



Utilité des corps p-adiques :

- Légitime certaines opérations :

Pour résoudre l'équation X=1+3X on pose $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 1+3x_n \end{cases}$

On obtient $x_n = 1+3+3^2+...+3^n$

Soit $x = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$

- Seuls complétés de Q avec R (théorème d'Ostrowski)

Théorème de Minkowski-Hasse sur les formes quadratiques à coefficients rationnels.

- Facilité de l'analyse :

_Les séries de nombre p-adiques tendent convergent ssi leur terme général tend vers 0

_ Z_p est compact

Lemme de Hensel :

Soit P(x) un polynôme dont les coefficients sont des entiers p-adiques et $a_0 \in Z_p$ tel que $P(a_0) \equiv 0[p]$ alors $\exists a \in Z_p, P(a) = 0 \ et \ a \equiv a_0[p]$

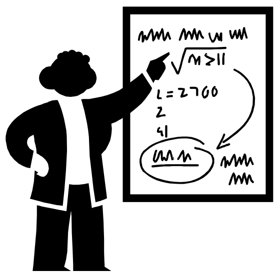
On construit une suite (a_n) tendant vers a de la manière suivante : $\forall n \ a_n - a_{n-1} = b_n p^n \equiv -\frac{P(a_{n-1})}{P'(a_{n-1})}[p^{n+1}]$

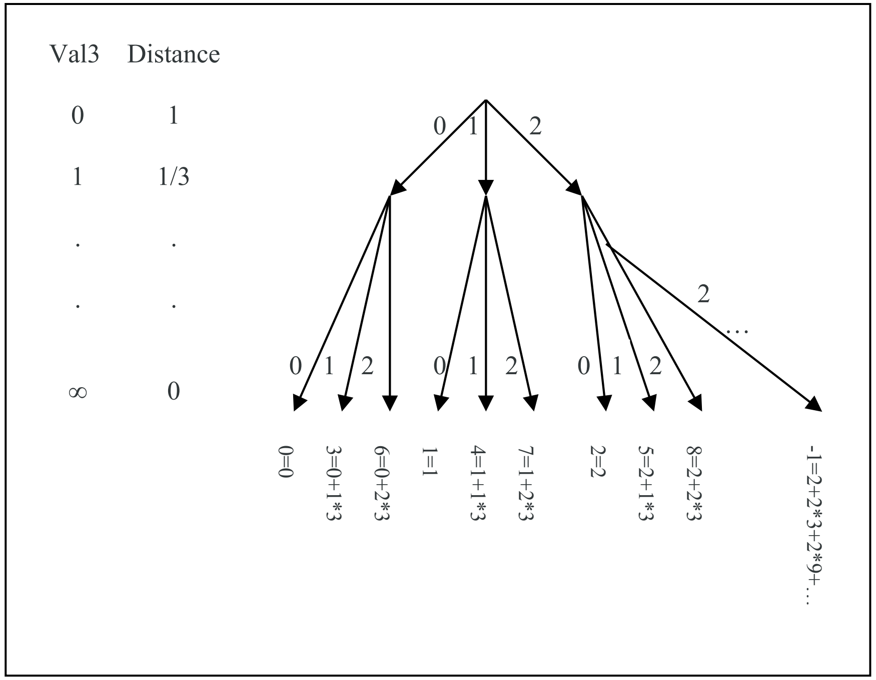
- Z_p a un unique idéal maximal (ie :un unique nombre premier)

- Utilité tant en analyse qu'en théorie des nombres dès qu'on veut raisonner modulo un nombre premier.

Par exemple :

Supposons $n^{\frac{1}{a}} = \frac{u}{v}$. Alors pour tout nombre premier p, $val\_p(n) = a * val\_p\left(\frac{u}{v}\right)$. Donc $n = \prod p^{a*val\_p\left(\frac{u}{v}\right)}$. $n^{\frac{1}{a}} \in N$.





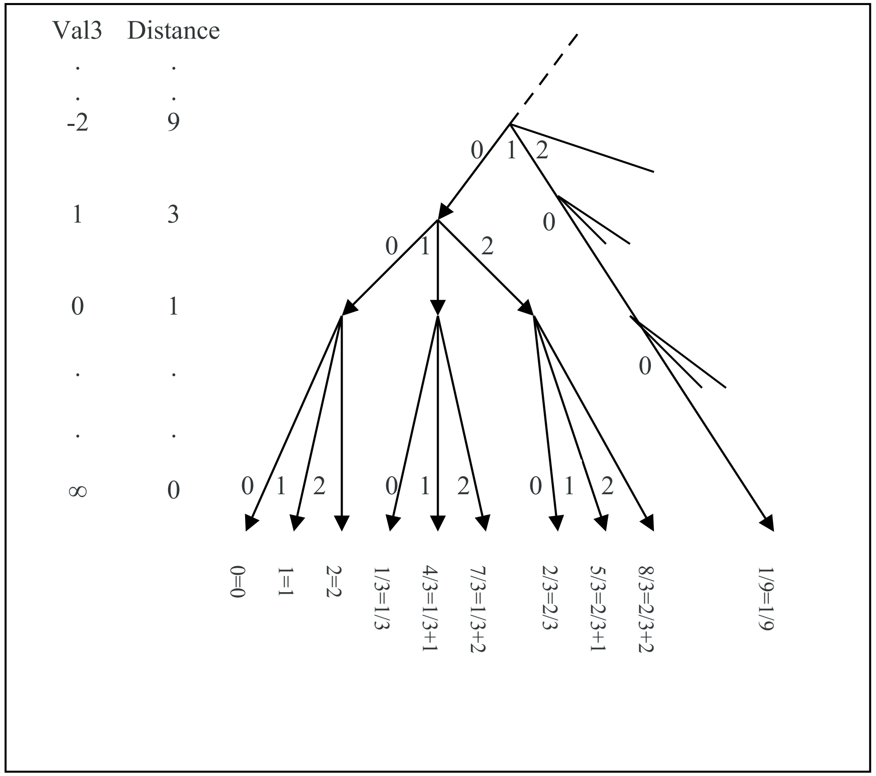
Représentation au moyen d'arbres :

Exemple d'espace ultra-métrique : l'ordre des animaux où les espèces sont plus ou moins proches si elles appartiennent au même genre, à la même classe…

Nous prendrons l'exemple du corps 3-adique, et nous commencerons par représenter les entiers : à chaque valuation possible 0, 1, 2… correspond la distance 1, 1/3, 1/9…

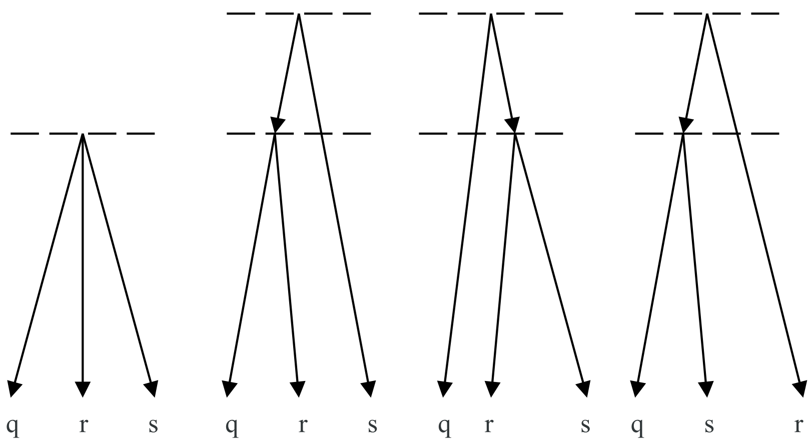
A l'infini, toute branche de l'arbre représente un entier 3-adique.

On fait de même pour représenter le corps 3-adique, mais cette fois-ci la valuation n'est pas toujours positive, et donc l'arbre n'a pas de racine.

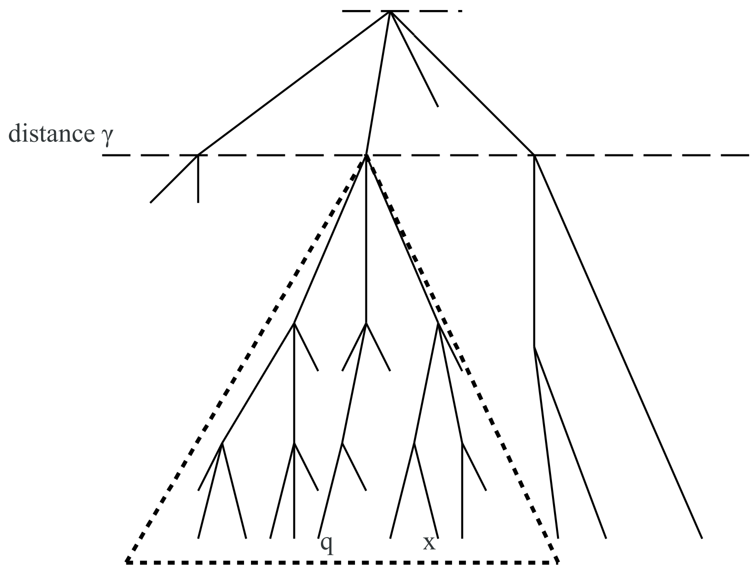


Propriétés ultra-métriques :

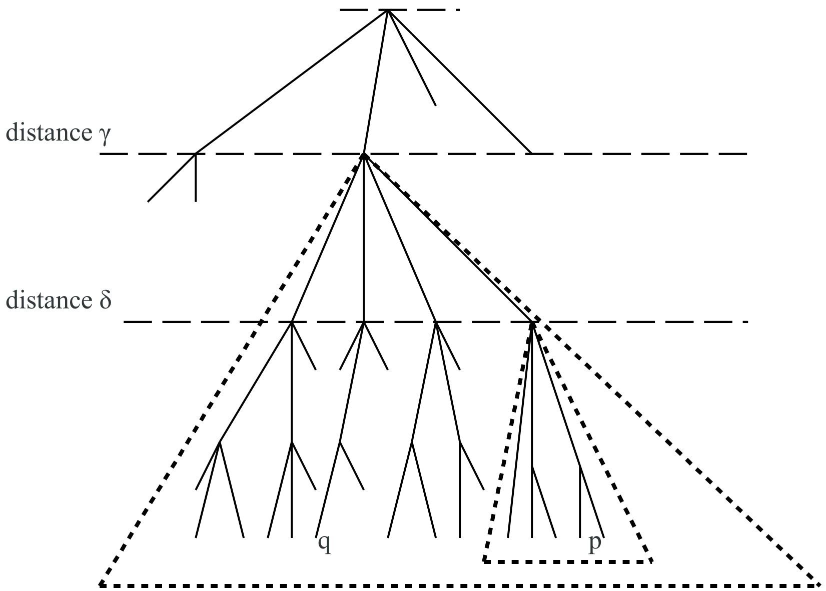
Tout triangle est isocèle :



Tout point d'un disque est centre de ce disque :



Deux disques s'intersectent ssi l'un des disques est contenu dans l'autre :

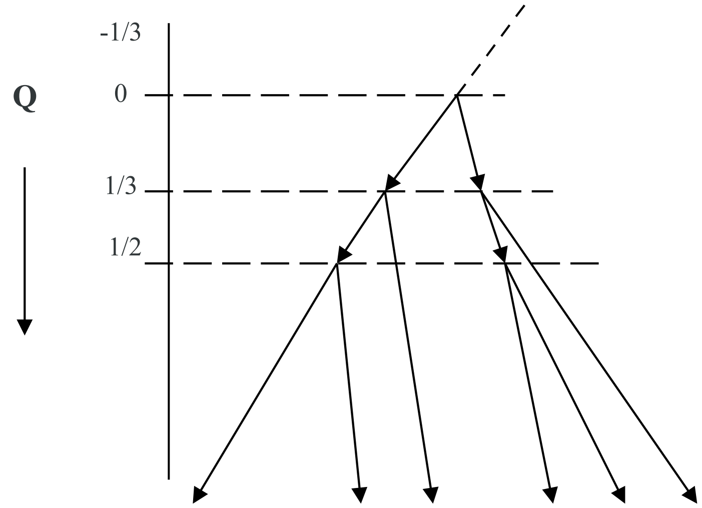


Représentation de C_p :

On note C_p le complété de la clôture algébrique $\overline{Q}_p$ de Q_p .

$\forall x \in Q \; p^x \in C_p$ et on étend la norme $|\;|_p$ de Q_p à $\overline{Q}_p$ de la manière suivante :
Soit α dont le polynôme canonique irréductible est $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ alors on a $val\_p(\alpha) = \dfrac{val\_p(a_n)}{n}$ et $|\alpha|_p = |a_n|_p^{1/n} = \dfrac{1}{p^{val\_p(\alpha)}}$.

Le groupe de valeur de la valuation est alors Q et chaque nœud de l'arbre est à hauteur d'un élément de Q.


-1/3
Q
0
1/3
1/2