1 15/09 Introduction

2 23/09 Premières majorations de sommes d'exponentielles

Suivre les sections $2.1, 2.3$ et 2.4 de [3]. Démontrer en priorité les théorèmes 2.1, 2.2, 2.8 et 2.9, ainsi que le lemme 2.5.

3 30/09 Application à la non-annulation de la fonction zeta.

Suivre la section 2.5 de [3]. En procédant comme dans la démonstration du théorème 8.29 de [4] à partir du corollaire 8.26 de [4], établir que la fonction zêta de Riemann ne s'annule pas dans une région de la forme

$$\sigma \geq 1 - \frac{c \log\log|t|}{\log|t|}.$$

Si possible, démontrer le lemme d'analyse complexe admis (théorèmes 3.10 et 3.11 de [6]). Mentionner sans démonstration les théorèmes 8.25, 8.27 et 8.29 de [4].

4 7/10 Paires d'exposants et transformation A

Suivre les sections 3.1 et 3.3 de [3] (en oubliant l'heuristique pour le processus B). Puis démontrer la validité du processus A en suivant la section 3.4 de [3].

5 14/10 Transformation B

Énoncer et démontrer la formule sommatoire de Poisson. Suivre les sections 3.2 et 3.5 de [3] (en oubliant l'heuristique pour le processus B) pour démontrer la validité du processus B.

Un petit graphique illustrant les paires d'exposants obtenues :

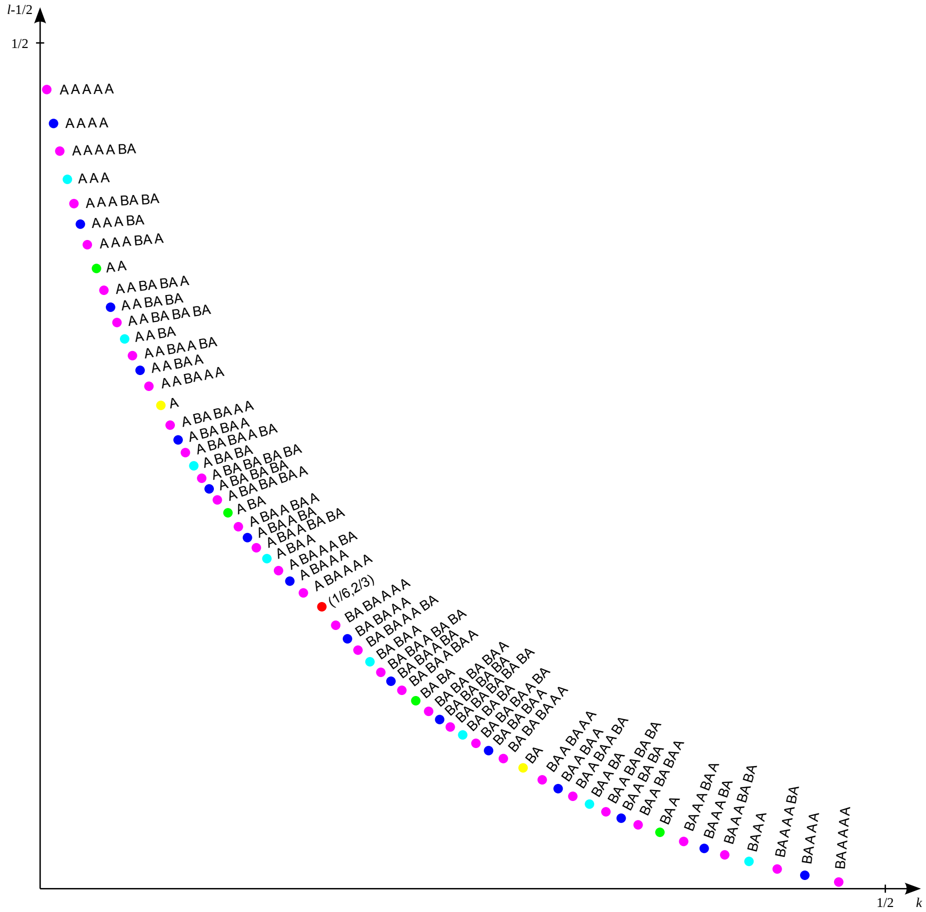

Figure 1: Paires obtenues à partir de $(1/6, 2/3)$ après au plus cinq applications de l'opérateur A, en coordonnées $(k, l - 1/2)$.

6 21/10 Applications de la théorie des paires d'exposants (I)

Démontrer le théorème 4.1 de [3], puis présenter les théorèmes 4.6 et 4.8. Suivre la section 5.1 de [3], puis présenter l'algorithme décrit à la fin de la section 5.3. Effectuer les applications numériques de la section 5.4. Si le temps le permet, démontrer la correction de l'algorithme.

7 28/10 Interlude : les fonctions de Beurling-Selberg.

Suivre l'appendice de [3], jusqu'au théorème $A.6$, sans présenter $A.5$. On pourra aussi consulter le chapitre $I.4.4$ de [5]. Ensuite, expliquer/démontrer l'assertion contenue dans le premier paragraphe de l'appendice A. Si le temps le permet, expliquer comment s'obtient l'inégalité du grand crible (théorème 4.7 dans le chapitre I.4.4 de [5]).

8 9/11 (13h) Applications de la théorie des paires d'exposants (II)

Démontrer le lemme 4.3 de [3] à l'aide de l'exposé précédent. Rappeler comment s'en déduit la majoration du théorème 4.6 de [3]. Énoncer les meilleures majorations connues à ce jour pour ces problèmes. Suivre ensuite la section 4.6 (pour arriver au théorème 4.14). Énoncer le meilleur résultat connu à ce jour pour ce problème.

9 18/11 La méthode de Vinogradov

On suit ici la section 8.5 de [4]. Rappeler le théorème 8.25, puis suivre les étapes I, II, III, IV jusqu'à l'inégalité (8.76). Énoncer le théorème 8.21 sans démonstration. Comparer avec le théorème 1.1 de [1]. Expliquer pourquoi ce dernier théorème, quoique fort impressionnant, ne permet pas d'améliorer le théorème 8.25. Suivre ensuite les étapes VI et VII de la section 8.5 de [4]. Expliquer ensuite la démonstration du théorème 8.21.

10 25/11 Les théorèmes de Vinogradov-Korobov

Expliquer en détail (y compris la formule de Perron) la démonstration du théorème 8.31 de la section 8.5 de [4]. Puis expliquer en détail la démonstration du corollaire 8.30 (adapter les méthodes du chapitre II.4 de [5]).

11 2/12 Équidistribution modulo 1 et discrépance

Suivre la section 6.5 de [5], sans présenter le théorème 6.14. Démontrer ensuite la majoration (2) du chapitre 25 de [2]. En déduire que la suite $\{p\sqrt{2}\}_{p \text{ premier}}$ est équidistribuée modulo 1, et donner une majoration de la discrépance.

References

[1] Bourgain, Demeter, Guth, Proof of the main conjecture in Vinogradov's mean value theorem for degrees higher than three. https://arxiv.org/abs/1512.01565

[2] Davenport. "Multiplicative number theory", Graduate Texts in Mathematics 74 (1980).

[3] S. W. Graham, G. Kolesnik. "Van der Corput's Method of Exponential Sums", London Mathematical Society Lecture Note Series No. 126, Cambridge University Press (1991).

[4] H. Iwaniec, E. Kowalski. "Analytic Number Theory", AMS (2004).

[5] Tenenbaum, Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres, Cours Spécialisés SMF, 1995.

[6] Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta function, Oxford University Press, 1986 (seconde édition)