TD 9

Dans cette feuille, par "représentation" on entend "représentation complexe de dimension finie".

Exercice 1.

Soit G un groupe fini et soient ϕ et ψ des caractères de G dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que si ψ est de degré 1, $\phi\psi$ est irréductible si et seulement si ϕ est irréductible.
2. Montrer que si ψ est de degré strictement supérieur à 1, le caractère $\psi\bar{\psi}$ n'est pas irréductible.
3. Soit ϕ un caractère irréductible de G. On suppose que ϕ est le seul caractère irréductible de son degré. Montrer que s'il existe un caractère ψ de degré 1 et $g \in G$ tel que $\psi(g) \neq 1$, alors $\phi(g) = 0$.

Exercice 2.

Soit G un groupe fini, soit H un sous-groupe de G et soit π une représentation de G de caractère χ.

1. Montrer que la restriction de π à H a pour caractère la restriction $\chi|_H$.
2. Si π est irréductible, est-ce que $\chi|_H$ est un caractère irréductible ?

Exercice 3.

Déterminer les caractères irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ pour $n \leq 4$.

Exercice 4.

Soit p un nombre premier et soit $f \geq 1$ un entier ; on pose $q = p^f$. Soit G le groupe $\{x \mapsto ax + b \mid a \in \mathbb{F}_q^\times,\ b \in \mathbb{F}_q\}$.

1. Déterminer la table des caractères de G.
2. Déterminer les représentations irréductibles de G.

Exercice 5.

Soient G_1 et G_2 deux groupes finis. Déterminer l'ensemble des représentations irréductibles (resp. des caractères) de $G_1 \times G_2$ en fonction des représentations irréductibles (resp. des caractères) de G_1 et G_2.

Exercice 6.

Soient G un groupe fini, χ le caractère d'une représentation et $K_\chi := \{g \in G : \chi(g) = \chi(1)\}$.

1. Montrer que K_χ est un sous-groupe distingué de G.
2. Montrer que G est simple si et seulement si $K_\chi = \{e\}$ pour tout caractère irréductible $\chi \neq 1$.

Exercice 7.

Soit G un groupe fini et soit X un ensemble fini sur lequel G agit transitivement. Soit ρ la représentation de permutation sur $\mathbb{C}$ définie par X et soit χ son caractère.

1. Montrer la décomposition $\rho = 1 \oplus \theta$, où θ ne contient pas la représentation triviale 1.

On fait opérer diagonalement G sur le produit $X \times X$ en posant $g(x, y) = (gx, gy)$ pour tout $g \in G$ et tous $x, y \in X$.

b) Montrer que le caractère de la représentation de permutation sur $X \times X$ est égal à χ^2.

c) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes
   (i) l'action de G sur X est doublement transitive ;
   (ii) on a l'égalité $\langle \chi^2, 1 \rangle = 2$;
   (iii) la représentation θ est irréductible.

Exercice 8.

Soit G un groupe fini, soit H un sous-groupe de G et soit (V, π) une représentation de H. On pose

$$\mathrm{Ind}_H^G(\pi) := \{f : G \to V \mid \forall x \in G\ \forall h \in H \quad f(hx) = \pi(h) f(x)\},$$

avec action de G donnée par $g(f) : x \mapsto f(xg)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$ est une représentation de G. Quelle est sa dimension ?
2. Si π est irréductible, est-ce que $\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$ est une représentation irréductible de G ?
3. On note 1 la représentation triviale du sous-groupe $\{1\}$ de G. Déterminer la représentation $\mathrm{Ind}_{\{1\}}^G(1)$.
4. (Réciprocité de Frobenius) Soit (W, ρ) une représentation de G. Montrer :

$$\mathrm{Hom}_G(\rho, \mathrm{Ind}_H^G(\pi)) \cong \mathrm{Hom}_H(\rho_{|H}, \pi)\,.$$

5. En déduire que, si ρ et π sont irréductibles, la multiplicité de ρ dans $\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$ est égale à la multiplicité de π dans $\rho_{|H}$.

Exercice 9.

Soit G un groupe fini et soit H un sous-groupe de G. On va définir une application entre espaces de fonctions centrales

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(H) & \longrightarrow & \mathcal{C}(G) \\ f & \mapsto & f^G. \end{array}$$

D'abord on définit $f^0 : G \to \mathbb{C}$ par

$$f^0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in H, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ensuite on pose $f^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} f^0(xgx^{-1})$.

1. Montrer que $f^G \in \mathcal{C}(G)$.
2. Supposons que f est un caractère irréductible. Est-ce que f^G est irréductible ?
3. Soit (π, V) une représentation de H et soit χ son caractère. Montrer que χ^G est le caractère de $\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$.
4. Soit ϕ une fonction centrale sur G et f une fonction centrale sur H. Montrer

$$\langle \phi, f^G \rangle = \langle \phi|_H, f \rangle.$$

Exercice 10.

Démontrer que tout caractère de $\mathfrak{S}_4$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs de caractères de représentations de la forme $\mathrm{Ind}_H^{\mathfrak{S}_4}(\chi)$ où H est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ et χ est une représentation de H de dimension 1.

Remarque : cette propriété est en fait verifiée pour tout groupe fini, et les sous-groupes H peuvent être choisis nilpotents. Il s'agit du théorème d'induction de Brauer.