TD5 : Groupes simples, groupes résolubles, et théorème de Schur-Zassenhaus

Exercice 1.

On suppose qu'il existe un groupe simple G d'ordre 180.

1. Montrer que G contient trente-six 5-Sylow.
2. Montrer que G contient dix 3-Sylow, puis que deux 3-Sylow distincts ne peuvent pas contenir un même élément $g \neq e_G$. (Indication : on pourra considérer les ordres possibles pour le centralisateur de g ; on observera qu'un groupe d'ordre 18 admet un unique 3-Sylow.)
3. Conclure.

Exercice 2.

Soient p et q deux nombres premiers distincts.

1. Montrer qu'un groupe d'ordre pq n'est pas simple.
2. Soit G un groupe simple non abélien d'ordre $p^\alpha m$, avec $\alpha \geq 1$ et m non divisible par p. On note n_p le nombre de p-Sylow de G. Montrer que $|G|$ divise $n_p!$.
3. Montrer qu'un groupe d'ordre $p^m q^n$, avec $p < q$, $1 \leq m \leq 2$ et $n \geq 1$, n'est pas simple.
4. Montrer qu'un groupe d'ordre $p^2 q$ ou $p^3 q$ n'est pas simple.

Remarque : un théorème de Burnside affirme que tout groupe d'ordre $p^m q^n$ est résoluble. On démontrera ce résultat plus tard en cours ou en TD.

Exercice 3.

Montrer qu'un groupe non commutatif d'ordre < 60 n'est pas simple.

Exercice 4.

On cherche à montrer que $\mathfrak{A}_5$ est le seul groupe simple d'ordre 60.

1. Faire la liste des éléments de $\mathfrak{A}_5$ avec leur ordre respectif. Décrire les classes de conjugaison dans $\mathfrak{A}_5$.
2. Montrer que $\mathfrak{A}_5$ est simple.
3. Soit G un groupe simple d'ordre 60. Montrer que le nombre de 2-Sylow de G est égal à 5 ou à 15.
4. En déduire que G contient un sous-groupe d'ordre 12.
5. Conclure.

Exercice 5.

1. Montrer qu'un groupe d'ordre $60 < n < 168$ avec n non premier n'est jamais simple.
2. Montrer que $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_2)$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ sont d'ordre 168.
3. Montrer que $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_2)$ est simple.
4. Soit G simple d'ordre 168. Montrer que G est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$.
5. Montrer que l'on a un isomorphisme entre $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_2)$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$.

Exercice 6.

On considère une suite exacte de groupes finis

$$1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} K \to 1,$$

et on suppose que N est abélien. On se propose de démontrer qu'une telle suite exacte est nécessairement scindée.
L'action par conjugaison de G sur N induit une action par automorphismes de K sur N, c'est-à-dire un morphisme $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(N)$ (cf. partiel). Soit $s_0 : K \to G$ une application telle que $\pi \circ s_0 = \mathrm{id}_K$.

1. Démontrer que pour tous $x, y \in K$, il existe un unique $f(x,y) \in N$ tel que

$$s_0(xy) = \iota(f(x,y)) s_0(x) s_0(y).$$

2. Démontrer que pour tous $x, y, z \in K$, on a

$$f(x,y)f(xy,z) = \varphi(x)(f(y,z))f(x,yz).$$

3. On suppose que $k = |K|$ est premier à N. Pour tout $x \in K$, on note $c(x)$ l'unique élément de N tel que

$$c(x)^k = \prod_{y \in K} f(x,y).$$

Démontrer que l'application $s : x \mapsto \iota(c(x))s_0(x)$ est un morphisme de groupes de K vers G, définissant une section de la suite exacte considérée.

Exercice 7. : Théorème de Schur-Zassenhaus

On considère une suite exacte de groupes finis

$$1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} K \to 1,$$

et on suppose que $|K|$ est premier à $|N|$. On se propose de démontrer le théorème de Schur-Zassenhaus, qui affirme qu'une telle suite exacte est nécessairement scindée. L'exercice 6 traite le cas où N est abélien, et on supposera donc le résultat connu dans ce cas. On raisonne par récurrence sur le cardinal de G.

1. Traiter le cas où N est un p-groupe, pour un certain p. On pourra s'inspirer de la démonstration de la résolubilité d'un p-groupe pour se ramener au cas abélien.
2. Traiter le cas où N admet un p-Sylow $P \neq \{1\}$ qui est distingué dans G. On pourra considérer la suite exacte

$$1 \to N/P \to G/\iota(P) \to K \to 1.$$

3. Traiter le cas où N admet un p-Sylow P qui n'est pas distingué dans G. On commencera par démontrer que $G = N_G(P)N$, où $N_G(P)$ est le normalisateur de P dans G, c'est-à-dire le sous-groupe des $g \in G$ tels que $gPg^{-1} = N$.

Exercice 8. : Théorème de Zassenhaus

On considère une suite exacte de groupes finis

$$1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} K \to 1.$$

On suppose que $|K|$ est premier à $|N|$, et que N est résoluble. Soient $s_1, s_2 : K \to G$ des sections de cette suite exacte. Démontrer qu'il existe un élément $g \in G$ tel que

$$\forall x \in K, \quad s_2(\pi(g)x\pi(g)^{-1}) = gs_1(x)g^{-1}.$$

Remarques : Une telle suite exacte est nécessairement scindée par le théorème de Schur-Zassenhaus (exercice 7). Par ailleurs, l'hypothèse de résolubilité sur N est superflue, mais la seule démonstration connue à ce jour repose sur le très difficile théorème de Feit-Thompson, qui affirme que tout groupe fini d'ordre impair est résoluble.

Exercice 9. : Théorème de Hall

Soit G un groupe fini résoluble, et soit d un diviseur de $|G|$ qui est premier à $|G|d^{-1}$. Démontrer que les sous-groupes d'ordre d de G sont deux à deux conjugués, et que tout sous-groupe de G d'ordre divisant d est contenu dans un sous-groupe d'ordre d (en particulier, il existe au moins un sous-groupe d'ordre d). On pourra raisonner par récurrence sur $|G|$, et admettre les résultats des exercices 7 et 8.

Remarques : si d est une puissance de nombre premier, l'hypothèse de résolubilité est superflue (théorèmes de Sylow). Cette hypothèse est en revanche nécessaire en général. On pourra par exemple remarquer que le groupe alterné $\mathcal{A}_5$, d'ordre $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, n'admet aucun sous-groupe d'ordre $15 = 3 \times 5$ ou d'ordre $20 = 2^2 \times 5$. Par ailleurs, il existe une réciproque au théorème de Hall, dûe à Burnside, affirmant la résolubilité d'un groupe fini possédant au moins un sous-groupe d'ordre d, pour chaque diviseur d de $|G|$ qui est premier à $|G|d^{-1}$. Ce dernier résultat implique facilement la résolubilité des groupes d'ordre $p^m q^n$ (cf. exercice 2).