TD3

Exercices $\star$: à préparer avant le TD, seront corrigés au début de la séance.

Exercice 1 : $\star$
Soit n, m et l des entiers naturels. Si A et B sont des parties de groupes abéliens qui sont Freiman-isomorphes à l'ordre $(n+m)l$, démontrer que $nA - mA$ et $nB - mB$ sont Freiman-isomorphes à l'ordre l.

Exercice 2 : $\star$
Soit k un entier et A une partie finie d'un groupe abélien. Démontrer que A est Freiman-isomorphe à l'ordre k à une partie d'un groupe abélien fini.

Exercice 3
Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Quel est le plus grand entier k pour lequel les parties $\{0, 1, n\}$ et $\{0, 1, n+1\}$ de $\mathbb{Z}$ sont Freiman-isomorphes à l'ordre k ?

Exercice 4
Soit $k \geq 1$ un entier naturel, p un nombre premier, et A une partie de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de cardinal $< \frac{\log(p)}{\log(2k)}$. Démontrer qu'il existe une partie A' de $\mathbb{Z}$ telle que l'application $A' \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de réduction modulo p est un isomorphisme de Freiman d'ordre k de A' sur A.

Exercice 5
Soit p un nombre premier. Construire une partie de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de cardinal $O(\log(2p))$ qui n'est pas Freiman-isomorphe à l'ordre 2 à une partie de $\mathbb{Z}$.

Exercice 6
Démontrer à l'aide du théorème de Freiman la généralisation suivante de l'exercice 2 : pour chaque $K \geq 1$, il existe $\varepsilon(K)$ telle que pour toute partie A de $\mathbb{Z}^d$ avec $|A + A| \leq K|A|$, il existe un isomorphisme de Freiman d'ordre 2 sur une partie d'un groupe abélien fini, de densité $\geq \varepsilon(K)$.

Exercice 7
Soit $G = (S(G), A(G))$ et $H = (S(H), A(H))$ des graphes finis. Un **morphisme** de H vers G est une application $f : S(H) \to S(G)$ telle que $(f(x), f(y)) \in A(G)$ pour chaque $(x, y) \in A(H)$.
1) Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta \in]0, 1]$ des nombres réels et soit (S_1, S_2) une paire ε^3-régulière avec $d(S_1, S_2) \geq \delta$. Si X est une partie de S_1 de densité $\geq \varepsilon$, démontrer que l'ensemble des $s \in S_2$ ayant au plus $(\delta - \varepsilon)|X|$ voisins dans X est de densité au plus ε dans S_2.
2) Soit $r \geq 1$ un entier, $\delta \in]0, 1]$ et $\varepsilon \in]0, r^{-1}2^{-r-1}\delta^r]$ des nombres réels, et soit $S_1, \ldots, S_r$ des parties de S. Soit E l'ensemble des paires $(i, j) \in [|1, r|]^2$ telles que la paire (S_i, S_j) est ε^3-régulière et $d(S_i, S_j) \geq \delta$. Démontrer qu'il existe des éléments $(s_i)_{i=1}^r$ avec $s_i \in S_i$ pour chaque i, tels que pour chaque $(j, t) \in E$ tel que $j > t$, on a

$$|\{s \in S_j \mid \forall i \in [|1, t|], (i, j) \in E \implies (s_i, s) \in A(G)\}| \geq (\delta - \varepsilon)^t |S_j|,$$

et tels que $(s_i, s_j) \in A(G)$ pour tout $(i, j) \in E$. On pourra construire $(s_i)_{i=1}^t$ par récurrence sur $t \in [|1, r|]$.

3) Dans le contexte de la question 2, démontrer que le nombre de r-uplets $(s_1, \ldots, s_r) \in \prod_{i=1}^r S_i$ tels que $(s_i, s_j) \in A(G)$ pour tout $(i,j) \in E$ est au moins $2^{-r}(\delta - \varepsilon)^{\binom{k}{2}} \prod_{i=1}^r |S_i|$.
4) En déduire la généralisation suivante du « lemme de suppression des triangles » : pour tout graphe fini H et tout $\eta > 0$ il existe $\delta = \delta(\eta, H)$ et $n_0 = n(\eta, H)$ tels que si $n \geq n_0$ et si le nombre de morphismes injectifs de H dans G est au plus $\delta n^{|H|}$, alors il existe un sous-graphe $G' \subseteq G$ obtenu par suppression d'au plus ηn^2 arêtes tel qu'il n'existe pas de morphisme injectif de H vers G'.
On pourra utiliser le lemme de régularité de Szemeredi et s'inspirer de la démonstration du lemme de suppression des triangles donnée dans le cours.