TD2

Exercices $\star$: à préparer avant le TD, seront corrigés au début de la séance.

Exercice 1 : $\star$
Soit A une partie de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ de densité α. Démontrer que $|\hat{A}(r)| \leq \alpha$ pour tout r, et que pour chaque $\delta > 0$ il y a au plus $\delta^{-2}\alpha^{-1}$ éléments r de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ tels que $|\hat{A}(r)| \geq \delta\alpha$.

Exercice 2 : $\star$
Soit A une partie de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ de densité $\alpha \leq \frac{\log(N)}{2N}$. Démontrer qu'il existe un élément r de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ non nul tel que $|\hat{A}(r)| \geq \frac{1}{2}\alpha$.

Exercice 3
Soit p un nombre premier impair, et soit $\psi : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^\times$ un caractère non trivial. Soit V un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel de dimension n et notons α_n la densité maximale d'une partie de V sans progression arithmétique non triviale de longueur 3. On choisit une telle partie $A \subseteq V$ de densité α_n.

1) Pour $f : V \to \mathbb{C}$ on pose $\hat{f} : v^* \in V^* \to \mathbb{E}_v[f(v)\bar{\psi}(\langle v^*, v\rangle)]$. Énoncer et démontrer les formules d'inversion, de Plancherel, de Parseval, et de convolution pour la transformation de Fourier $f \mapsto \hat{f}$.

2) Soit $f(y) = \alpha_{n-1} - A(y)$. Démontrer que l'on a

$$\sum_{v^* \in V^*} \hat{A}(v^*)^2 \hat{f}(-2v^*) = \alpha_{n-1}\alpha_n^2 - |V|^{-1}\alpha_n.$$

3) Démontrer que l'on a $||\hat{f}||_\infty = \hat{f}(0) = \alpha_{n-1} - \alpha_n$.

4) En déduire que l'on a

$$\alpha_n \leq \frac{|V|^{-1} + \alpha_{n-1}}{1 + \alpha_{n-1}},$$

puis que l'on a $\alpha_n \leq \frac{2}{n}$.

Exercice 4
On se propose de donner une autre démonstration du théorème de Roth, suivant une méthode dûe à Ernest Croot et Olof Sisask. On suppose connus les résultats de l'exercice 11 de la feuille 1.
On note $\varepsilon(r)$ la densité maximale d'une partie de $[r] = \{0, 1, \ldots, r-1\}$ ne contenant pas de progression arithmétique non triviale de longueur 3, et posons $\kappa = \operatorname{limsup} \varepsilon(r)$.

1) Rappelons que $\varepsilon(8) = \frac{1}{2}$. En déduire que $\varepsilon(17) = \frac{8}{17}$, puis que $\kappa \leq \frac{8}{17}$.

On raisonne par l'absurde en supposant $\kappa > 0$. Soit A une partie de $[r]$ ne contenant pas de progression arithmétique non triviale de longueur 3, de densité $\kappa + o(1)$. Soit p un nombre premier tel que $2r \leq p \leq 2r + o(r)$. La densité de A dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est donc $\frac{\kappa}{2} + o(1)$.

2) Soient $x_1, \dots, x_k$ les éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en lesquels $\hat{A}$ est de module $\geq (\log p)^{-\frac{1}{4}}$. Démontrer que $k \leq (\log p)^{\frac{1}{2}}$, puis que l'ensemble de Bohr $B(x_1, \dots, x_k, 2\pi \exp(-(\log p)^{\frac{1}{2}}))$ contient un élément non nul λ.

3) Soit $f : x \to \frac{1}{8} \sum_{j=0}^{16} A(x + \lambda j)$. Démontrer que l'on a

$$\mathbb{E}_{x,\mu}[f(x)f(x+\mu)f(x+2\mu)] = O\left((\log p)^{-\frac{1}{4}}\right),$$

et en déduire une contradiction à l'aide de la question 4 de l'exercice 11 de la feuille 1.

Exercice 5
Soit A une partie de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ tirée aléatoirement de la manière suivante : les N variables aléatoires $(1_{x \in A})_{x \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$ sont i.i.d. et suivent une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Démontrer que l'on a

$$\mathbb{E}[\max_{r \neq 0} |\hat{A}(r)|] \leq N^{-\frac{1}{2}} (\log 2N)^{\frac{1}{2}}.$$

En particulier : « les ensembles aléatoires sont quasi-aléatoires ».

Exercice 6
Soit G un graphe à n sommets, de matrice d'adjacence A. Puisque A est réelle symétrique, on peut trouver une base orthornormé $u_1, \dots, u_n$ de $\mathbb{R}^G$ formée de vecteurs propres de A. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres correspondantes, que l'on suppose ordonnées dans l'ordre décroissant.

1) Démontrer que $A(x, y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i(x) u_i(y)$.

2) Donner des interprétations combinatoires des quantités $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i^4$.

3) Démontrer que $\lambda_1 \geq 0$. Indication : l'application qui à un élément $f \in \mathbb{R}_+^G$ tel que $||f||_1 = 1$ associe $Af/||Af||_1$ admet un point fixe.

4) Soit δ la densité de G. Démontrer que $\lambda_1 \geq \delta n$.

5) Supposons que la densité de 4-cycles de G est au plus $\delta^4(1 + c^4)$. Démontrer que $\lambda_2 \leq c\delta n$.

Exercice 7
Existe-t-il une constante $C > 0$ telle que

$$\frac{|A - A|}{|A|} \leq C \frac{|A + A|}{|A|}$$

pour toute partie finie A de $\mathbb{Z}$?