TD1 : Combinatoire probabiliste

Exercices $\star$: à préparer avant le TD, seront corrigés au début de la séance.

Exercice 1 : $\star$
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans l'intervalle $[0, M]$ (avec $M > 0$) et d'espérance δM. Démontrer l'inégalité

$$\mathbb{P}[X > \varepsilon M] \geq \delta - \varepsilon$$

pour chaque $\varepsilon \geq 0$. En particulier $\mathbb{P}[X > \frac{\delta}{2} M] \geq \frac{\delta}{2}$.

Exercice 2 : $\star$
1) Démontrer l'inégalité de Jensen : si X est une variable aléatoire réelle à valeurs dans un intervalle I, dont l'espérance existe, et si f est une fonction convexe sur I, alors $f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[f(X)]$.
2) Soit $X_1, \ldots, X_N$ des variables aléatoires réelles identiquement distribuées. On pose $\phi(\lambda) = e^{\lambda \mathbb{E}[X_1]} \mathbb{E}[e^{-\lambda X_1}]$. Démontrer que pour chaque $\lambda > 0$, on a

$$\mathbb{E}[\min_{1 \leq i \leq N} X_i] \geq \mathbb{E}[X_1] - \frac{\log(N\phi(\lambda))}{\lambda}.$$

Indication : on pourra appliquer l'inégalité de Jensen à la fonction convexe $x \mapsto e^{-\lambda x}$.
3) Soit $Y_1, \ldots, Y_N$ des variables aléatoires deux à deux indépendantes, uniformément distribuées dans $\{0, 1\}^n$. Démontrer l'inégalité

$$\mathbb{E}[\min_{1 \leq i \neq j \leq N} d(Y_i, Y_j)] \geq \frac{n}{2} - \sqrt{n \log(N)},$$

où $d(x, y) = |\{i \in [|1, n|] \mid x_i \neq y_i\}|$ est la distance de Hamming. Retrouver ainsi le résultat énoncé au début du cours du 11 janvier.
4) Démontrer que pour chaque entier k il existe un ensemble fini X ainsi qu'une relation antisymétrique R sur X (i.e. telle que pour tous x, y distincts, on a pas $xRy \wedge yRx$) tels que $\min_{x_1, \ldots, x_k} |\{x \in X \mid \forall i,\ xRx_i\}| \geq 1$.

Exercice 3
Soit G un groupe abélien fini, et soit A une partie de G de densité α.
1) Soit B une partie de G de densité β. Démontrer qu'il existe un élément x de G tel que

$$1 - \frac{|A \cup (B + x)|}{|G|} \leq (1 - \alpha)(1 - \beta).$$

3) Démontrer qu'il existe $d = O(\log \frac{2}{\alpha})$ et des éléments $x_1, \ldots, x_d$ de G tels que

$$|A + \{0, x_1\} + \cdots + \{0, x_d\}| \geq \frac{1}{2}|G|.$$

4) Démontrer qu'il existe $d = O(\log(\frac{2}{\alpha}) + \log\log(3|G|))$ et des éléments $x_1, \ldots, x_d$ de G tels que

$$A + \{0, x_1\} + \cdots + \{0, x_d\} = G.$$

Exercice 4
Soit $k \geq 1$ un entier. Montrer qu'il existe une infinité de nombre premiers p pour lesquels il existe $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tels que pour tous $i \neq j$, la différence $x_i - x_j$ n'est pas un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 5
Soit G un graphe possdánt n sommets, αn^2 arêtes et βn^3 triangles. Démontrer que G possède un sous-graphe induit avec $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sommets, $(\alpha + O(\alpha^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}))(\frac{n}{2})^2$ arêtes et $(\beta + O(\beta^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}))(\frac{n}{2})^3$ triangles.

Exercice 6
Soit p un nombre premier, et A, B des parties de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de densités respectives α, β. Démontrer l'existence d'éléments x et λ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, avec $u \neq 0$, tels que

$$||A \cap (x + \lambda B)| - \alpha\beta p| \leq \sqrt{\alpha\beta p}.$$

Exercice 7
Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$, et soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendante, toutes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.
1) Calculer l'espérance et la variance de $S = \sum_{i=1}^n a_i X_i$.
2) Démontrer que pour chaque entier $k \geq 1$ on a $\mathbb{E}[|S|^{2k}] \leq C_k$ pour une certain réel C_k ne dépendant que de k (e.g. $C_k = (2k)^k$).

Exercice 8
Soit A une matrice de taille n à coefficients dans $\{-1, 1\}$. Démontrer que l'on a

$$\max_{x,y \in \{-1,1\}^n} {}^t x A y \geq \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} + o(1) \right) n^{\frac{3}{2}}.$$

Exercice 9
Soit A une partie d'un groupe abélien fini, de densité α. Démontrer que le nombre d'éléments de A^8 de la forme

$$(x, x + a, x + b, x + c, x + a + b, x + a + c, x + b + c, x + a + b + c)$$

est compris entre $\alpha^8 p^4$ et $\alpha^4 p^4$.

Exercice 10
Soient X et Y des ensembles finis. Soient x, x', y, y' des variables aléatoires indépendantes telles que x et x' (resp. y et y') sont de loi uniforme sur X (resp. Y). Si f_1, f_2, f_3, f_4 sont des applications de $X \times Y$ dans $\mathbb{C}$, on pose

$$[f_1, f_2, f_3, f_4] = \mathbb{E}[f_1(x, y)\overline{f_2(x, y'}]\overline{f_3(x', y)} f_4(x', y').$$

On pose aussi $||f||_\square = [f, f, f, f]^{\frac{1}{4}}$.
1) Démontrer l'inégalité suivante :

$$|[f_1, f_2, f_3, f_4]| \leq ||f_1||_\square ||f_2||_\square ||f_3||_\square ||f_4||_\square.$$

2) En déduire que $|| \cdot ||_\square$ est une norme. On pourra développer $||f + g||_\square^4$ pour démontrer l'inégalité triangulaire.

Exercice 11
Soit $r \geq 1$ un entier, et soit $\varepsilon(r)$ la densité maximale d'une partie de $[r] = \{0, 1, \ldots, r-1\}$ ne contenant pas de progression arithmétique non triviale de longueur 3 (i.e. ne contenant pas de triplet $\{x, x+\mu, x+2\mu\}$ avec $\mu \neq 0$).
1) Calculer $\varepsilon(r)$ pour $r \leq 8$.
Soit $p \geq 2r-1$ un nombre premier. Soit x, y, μ et ν des variables aléatoires indépendantes, telles que x et y (resp. μ et ν) suivent des lois uniformes sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (resp. $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$).
2) Soit A une partie de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de densité α. Démontrer les inégalités

$$\mathbb{P}[x, x+\mu, x+2\mu \in A \cap (y+\nu[r])] \leq \frac{r^2}{2p(p-1)}\mathbb{P}[x, x+\mu, x+2\mu \in A],$$
$$\mathbb{P}[x, x+\mu, x+2\mu \in A \cap (y+\nu[r])] \geq \frac{1}{p(p-1)}\mathbb{P}[|A \cap (y+\nu[r])| > \varepsilon(r)r].$$

3) En utilisant la question précédente et l'exercice 1, démontrer l'inégalité

$$\mathbb{P}[x, x+\mu, x+2\mu \in A] \geq \frac{2}{r^2}(\alpha - \varepsilon(r)).$$

Que dire de A si $p > 13$ et $\alpha > \frac{1}{2}$?
4) Démontrer *l'inégalité de Varnavides* : pour chaque application $f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to [0,1]$ on a

$$\mathbb{E}[f(x)f(x+\mu)f(x+2\mu)] \geq \frac{2}{r^2}(\mathbb{E}[f(x)] - \varepsilon(r)).$$

Exercice 12
Soit $r_d(n)$ le plus petit cardinal d'une partie A de $[|1,n|]^d$ telle que tout élément de $[|1,n|]^d$ appartient à une droite passant par (au moins) deux points distincts de A.
1) Démontrer que $r_d(n) \geq n^{\frac{d-1}{2}}$.
2) Démontrer que $r_d(n) = O_d(n^{\frac{d}{2}} \log(2n))$.
3) (difficile) Améliorer le résultat de la question 1 en remplaçant l'exposant de n par $\frac{d}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4(2d-1)}$.