TD 11

Exercice 1.

Décomposer sous forme de combinaison linéaire de carrés les formes quadratiques réelles suivantes ; en déduire leur signature et leur rang.

1. $f(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + xz + yz$.
2. $f(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$.
3. $f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$.
4. $f(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx$.
5. $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$.
6. $f(A) = \mathrm{tr}(A^2)$, pour $A \in M_n(\mathbb{R})$.
7. $f(A) = \mathrm{tr}({}^t AA)$, pour $A \in M_n(\mathbb{R})$.
8. $f(A) = \mathrm{tr}(A)^2$, pour $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2.

Soit $n \geq 1$ et soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$B(P, Q) = \int_0^1 tP(t)Q'(t)dt \qquad \text{et} \qquad f(P) = B(P, P).$$

1. Montrer que B est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ? Antisymétrique ?
2. La forme f a-t-elle des vecteurs isotropes non nuls ?
3. Calculer la matrice de f dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$.
4. Pour $n = 2$, déterminer la signature de f. La forme f est-elle positive ? Négative ?

Exercice 3.

Soit K un corps de caractéristique différente de 2. Soit P un K-espace vectoriel de dimension 2, muni d'une forme quadratique f. Quelles sont valeurs possibles pour le nombre de droites isotropes de f ? Donner un exemple dans chaque cas.

Exercice 4.

Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient f et f' des formes quadratiques sur E vérifiant $f^{-1}(0) = (f')^{-1}(0)$.

1. Supposons K algébriquement clos. Montrer qu'il existe $a \in K^\times$ tel que l'on ait $f' = af$.
2. Donner un contre-exemple pour $K = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$.

Exercice 5.

Soit K un corps de caractéristique différente de 2, soit E un K-espace vectoriel de dimension finie non nulle et soit H un hyperplan de E. Soient de plus f une forme quadratique non dégénérée sur E et u un élément de $\mathcal{O}(E, f)$ vérifiant $u_{|H} = \mathrm{id}_H$.

1. Si $f_{|H}$ est non dégénérée, montrer que u est soit l'identité, soit la réflexion orthogonale d'hyperplan H.
2. Si $f_{|H}$ est dégénérée, montrer que u est l'identité.

Exercice 6.

Soit $n \geq 1$ et soit $E = \mathbb{R}^{n+1}$ muni de la forme quadratique

$$f(x_0, \ldots, x_n) = x_0^2 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2),$$

de forme bilinéaire b. Un sous-espace F de E est dit *elliptique* si $f_{|F}$ est définie négative, *hyperbolique* si $f_{|F}$ est de signature $(1, m)$ avec $m \geq 1$ et *parabolique* si $f_{|F}$ est dégénérée.

1. Soit F un sous-espace de dimension au moins 2 tel qu'il existe $x \in F$ avec $f(x) > 0$. Montrer que F est hyperbolique.
2. Soit F un sous-espace elliptique de dimension au plus $n-1$. Montrer que $F^\perp$ est hyperbolique.
3. Soit F un sous-espace parabolique. Montrer que $f|_F$ est de rang $\dim F - 1$.

Exercice 7.

Soient $p \neq q$ deux nombres premiers impairs. On note $\left(\frac{p}{q}\right)$ l'entier qui vaut 1 si p est un carré modulo q et -1 sinon. On note $S := \{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{F}_q^p : \sum_i x_i^2 = 1\}$.

1. Montrer que $\left(\frac{q}{p}\right) \equiv q^{\frac{p-1}{2}}$ $[p]$.
2. En considérant une action de groupe, montrer que $|S| \equiv 1 + \left(\frac{p}{q}\right)$ $[p]$.
3. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{F}_q^p$ dans laquelle la forme quadratique $\sum_i X_i^2$ admet pour matrice
$$\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (-1)^{\frac{p-1}{2}}\right).$$
4. En déduire que $|S| = q^{\frac{p-1}{2}}(q^{\frac{p-1}{2}} + (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}})$.
5. Conclure que $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$ (c'est la loi de réciprocité quadratique).

Exercice 8.

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ sans facteurs carrés. On considère la forme quadratique $f(x, y, z) := ax^2 + by^2 + cz^2$ sur $\mathbf{Q}^3$.

1. À quelle condition sur a, b, c la forme f est-elle isotrope sur $\mathbb{R}$?
2. On suppose $a, b > 0$ et $c = -1$ et on note d le pgcd de a et b. Montrer que la forme quadratique f est isotrope sur $\mathbf{Q}$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites
   (a) a est un carré modulo b.
   (b) b est un carré modulo a.
   (c) $-\frac{ab}{d^2}$ est un carré modulo d.
3. On suppose désormais a, b, c deux-à-deux premiers entre eux. Montrer que f est isotrope sur $\mathbf{Q}$ si et seulement si f est isotrope sur $\mathbb{R}$ et les trois conditions suivantes sont satisfaites
   (a) $-ab$ est un carré modulo c.
   (b) $-ac$ est un carré modulo b.
   (c) $-bc$ est un carré modulo a.
4. Sous les hypothèses de la question c), montrer que f est isotrope sur $\mathbf{Q}$ si et seulement si f est isotrope sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre premier p, pour tout entier $m \geq 1$, il existe $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ non tous divisibles par p tels que $f(x, y, z) \equiv 0$ $[p^m]$.
5. Vérifier que dans l'équivalence précédente, il suffit de prendre $p | abc$ et $m = 2$.
6. Soit q une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbf{Q}^3$. Donner un algorithme permettant de décider si q est isotrope.